INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVII. BAND DRITTES HEFT 1949

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 24.—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Stuttgart N, Roseggerweg 8

Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Rubbert, Friedrich Karl, Über Schwingungen mit kombinierter Dämpfung ... 165

Martin, Friedrich, Die Membran-Kugelschale unter Einzellasten. Mit 14 Textabbildungen ... 167

Kaufmann, Walter, Die energetische Berechnung des induzierten Widerstandes. Mit 3 Textabbildungen ... 187

Wuest, Walter, Beitrag zur instationären laminaren Grenzschicht an ebenen Wänden. Mit 5 Textabbildungen ... 193

Wuest, Walter, Entwicklung einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugestelle. Mit 7 Textabbildungen ... 199

Ludwieg, Hubert, Ein Gerät zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten. Mit 6 Textabbildungen ... 207

Grammel, Richard, Das Abbremsen drehsymmetrischer Körper beim Fall auf Sand. Mit 8 Textabbildungen ... 219

Zerna, Wolfgang, Zur Membrantheorie der allgemeinen Rotationsschalen. Mit 4 Textabbildungen ... 223

Steinbuch, Karl, Ein Verfahren zur Lösung eindimensionaler Ausgleichsvorgänge ... 233

Ohlig, Rudolf, Die eingespannte Rechteckplatte. Mit 4 Textabbildungen ... 243

Kahlert, Wolfgang, Berichtigung ... 264

INGENIEUR-ARCHIV

XVII. BAND | DRITTES HEFT | 1949

Über Schwingungen mit kombinierter Dämpfung.

Von F. K. Rubbert.

1. Einleitung. Das Verhalten eines Schwingers mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung und Festreibung ist bereits von *Bögel*[1] ausführlich untersucht worden. Ein allgemeines Amplitudengesetz hat man aber bis heute nicht aufgestellt; nachstehend soll nun gezeigt werden, daß ein solches doch existiert und recht einfach abgeleitet werden kann. Die Anwendung dieses Gesetzes führt zu Formeln für die Dämpfungskonstanten, die gegenüber den von *Bögel* mitgeteilten den Vorzug verdienen.

Das Zusammenwirken von linearer Dämpfung und Reibung kann physikalisch durchaus als erste Näherung einer von der Geschwindigkeit abhängigen Dämpfung angesehen werden. Auf das Amplitudengesetz bei zweiter Näherung, d. h. bei der weiteren Berücksichtigung einer dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung soll ein anderes Mal eingegangen werden.

2. Das allgemeine Amplitudengesetz. Die Differentialgleichung für einen Schwinger mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung und Festreibung lautet

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -(\operatorname{sgn}\dot{q})f\,. \tag{2,1}$$

Zu ihrer Integration führt man neue Konstanten ein:

$$\frac{b}{a} = 2k\,, \qquad \frac{c}{a} = \omega^2\,, \qquad \frac{f}{a} = s\omega^2;$$

es ergibt sich damit

$$\ddot{q} + 2k\dot{q} + \omega^2[q + s(\operatorname{sgn}\dot{q})] = 0\,. \tag{2,2}$$

Da s konstant ist, kann Gleichung (2,2) auch geschrieben werden

$$D^2(q \pm s) + 2kD(q \pm s) + \omega^2(q \pm s) = 0\,, \tag{2,3}$$

d. h. für $q \pm s$ gilt die bekannte Differentialgleichung der gedämpften Schwingung. Wegen des Vorzeichenwechsels ist die Integration aber jeweils nur für eine Halbschwingung möglich; durch „Anstücken"[2] oder durch Anwendung der Operatorenrechnung[3] gelangt man zur Darstellung der n-ten Halbschwingung.

Nach (2,3) findet die Bewegung bei Festreibung so statt, als ob q um $\pm s$ ($\pm$, je nachdem $\operatorname{sgn}\dot{q}$ negativ oder positiv ist) verschoben ist; das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden (in den Umkehrpunkten) wird daher ausgedrückt durch die bekannte Gleichung

$$e^{kT/2} = \frac{|q_{r-1}| - s}{|q_r| + s} = \frac{|q_r| - s}{|q_{r+1}| + s}\,, \tag{2,4}$$

wo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}\,.$$

Durch korrespondierende Subtraktion entsteht aus (2,4)

$$e^{kT/2} = \frac{|q_{r-1}| - |q_r|}{|q_r| - |q_{r+1}|}\,; \tag{2,5}$$

andererseits ist nach (2,4)

$$|q_r| = -s + e^{-kT/2}(|q_{r-1}| - s)\,, \tag{2,6a}$$

$$|q_{r+1}| = -s + e^{-kT/2}(|q_r| - s) \tag{2,6b}$$

und Einsetzen von (2,6a) und (2,6b) in (2,5) ergibt nach leichter Umformung

$$e^{kT/2} = \frac{|q_{r-1}| + s\operatorname{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)}{|q_r| + s\operatorname{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)}\,. \tag{2,7}$$

---

[1] *K. Bögel*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 247.
[2] Vgl. z. B. *K. Klotter*, Technische Schwingungslehre, Bd. I, S. 86. Berlin 1938.
[3] *Pipes*, Phil. Mag. 25 (1938) S. 950.

Setzt man hierin $r=1, 2, \ldots, n$ und bildet dann das Produkt dieser n Gleichungen, so entsteht das allgemeine Amplitudengesetz

$$e^{nkT/2} = \frac{|q_0| + s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)}{|q_n| + s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)}\,. \tag{2,8}$$

Tritt zu einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung noch Festreibung hinzu, so ändert sich das Amplitudengesetz des Schwingers also nur dadurch, daß jeder Absolutbetrag einer Amplitude um den konstanten Summanden $s\,\mathfrak{Ctg}(k\,T/4)$ vergrößert erscheint.

Aus (2,3) erkennt man ferner, daß durch die Festreibung die Schwingungsdauer nicht geändert wird. Dabei darf aber unter „Schwingungsdauer" nur das konstante Zeitintervall zwischen zwei Umkehrpunkten verstanden werden; die „Durchschlagspunkte" sind jetzt durchaus nicht mehr äquidistant.

Die Amplitude im n-ten Umkehrpunkt ist nach (2,8)

$$|q_n| = |q_0|\,e^{-nkT/2} - s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)[1 - e^{-nkT/2}]. \tag{2,9}$$

3. Bestimmung der Dämpfungskonstanten. Aus den Gleichungen (2,4) und (2,5) erhält man für die Dämpfungskonstanten k und s die von *Bögel* angegebenen Formeln

$$k = \frac{2}{T}\ln\frac{|q_{r-1}| - |q_r|}{|q_r| - |q_{r+1}|}\,, \tag{3,1}$$

$$s = \frac{|q_r|^2 - |q_{r-1}|\,|q_{r+1}|}{|q_{r-1}| - |q_{r+1}|}\,; \tag{3,2}$$

sie haben den Nachteil, daß sie drei aufeinanderfolgende Amplituden benutzen. Geeignetere Formeln finden sich durch Anwendung des allgemeinen Amplitudengesetzes (2,8); danach ist

$$e^{nkT/2} = \frac{|q_0| + s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)}{|q_n| + s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)} = \frac{|q_n| + s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)}{|q_{2n}| + s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right)}\,,$$

und durch korrespondierende Subtraktion folgt

$$e^{nkT/2} = \frac{|q_0| - |q_n|}{|q_n| - |q_{2n}|} \tag{3,3}$$

und hieraus

$$k = \frac{2}{nT}\ln\frac{|q_0| - |q_n|}{|q_n| - |q_{2n}|}\,. \tag{3,4}$$

Nachdem k bestimmt ist, ergibt sich s nach (2,9) zu

$$s = \mathfrak{Tg}\left(\frac{kT}{4}\right)\frac{|q_0|\,e^{-nkT/2} - |q_n|}{1 - e^{-nkT/2}}\,. \tag{3,5}$$

4. Negative Reibung bzw. Dämpfung. Für negatives s lautet (2,9), wenn

$$s\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{kT}{4}\right) = p\,|q_0| \tag{4,1}$$

gesetzt wird, wo p einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,

$$|q_n| = |q_0|\left[p + (1-p)\,e^{-nkT/2}\right]. \tag{4,2}$$

Hieraus erkennt man, daß für $p=1$ eine ungedämpfte Schwingung auftritt. Ist aber $p \gtrless 1$, so streben die Amplituden gegen den Grenzwert[1] $p\,|q_0|$.

Entsprechend läßt sich das Verhalten bei negativem k und positivem s untersuchen. Für $p=1$ tritt wieder eine ungedämpfte Schwingung auf. Dagegen ergibt jetzt $p>1$ eine gedämpfte Schwingung und $p<1$ eine Aufschaukelung. Diese Erkenntnis hat bereits *Bögel* aus einer Ungleichung gewonnen.

(Eingegangen am 6. April 1948.)

Anschrift des Verfassers: *Friedrich Karl Rubbert*, (20b) Göttingen (Hann.), Lotzestr. 29.

[1] Auf Anregung des Verfassers hat *M. G. Drexhage* in seiner Göttinger Diplomarbeit (1947), Formel (4,2) auf die mit elektrischen Impulsen arbeitenden Pendeluhren der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt mit sehr gutem Erfolg angewandt.

Die Membran-Kugelschale unter Einzellasten.

Von F. Martin.

1. Einleitung. Membranspannungszustände der Kugelschale unter Einzellasten sind zuerst von *Fr. Dischinger*[1] gemeinsam mit *W. Flügge* berechnet worden, und zwar im Prinzip auf dem folgenden Wege: Ein Schalenpunkt werde durch Angabe der geographischen Breite ϑ_1 ($\vartheta_1 = 0$ am Äquator) und der geographischen Länge ϑ_2 festgelegt. Nach *H. Reißner*[2] entwickelt man die Schnittkräfte, die bei der in Breitenkreisrichtung geschlossenen Schale periodische Funktionen von ϑ_2 mit 2π als Periode sind, in trigonometrische Reihen mit $n\,\vartheta_2$ als Argument ($n = 0, 1, 2\ldots$). Man erhält dann Schnittkräfte, die auf der ganzen Kugelfläche regulär sind, mit Ausnahme der Pole des verwendeten Koordinatensystems, wo sie mit bestimmter von n abhängiger Ordnung unendlich oder Null werden. Die drehsymmetrische Lösung ($n = 0$) bedeutet nun eine Einzelkraft im Pol des Systems, die normal zur Kugelfläche gerichtet ist, oder ein Moment um die Achse durch beide Pole. Die erste Harmonische ($n = 1$) bedeutet eine tangentiale Einzellast im Pol oder ein Moment um eine in der Tangentialebene am Pol liegende Achse[3]. Trägt die Schale mehrere Einzellasten (im Innern der Fläche oder auf dem Rand), so braucht man nur den Pol des Koordinatensystems an die jeweilige Stelle des Lastangriffes zu legen (das ist wegen der Kugelsymmetrie immer möglich) und hat dann die so gewonnenen Einzellösungen auf ein gemeinsames Koordinatensystem zu transformieren. Das gleiche gilt natürlich für die Singularitäten höherer Ordnung, die aus der *Reißner*schen Lösung für $n > 1$ folgen. Jedoch ist dann unter Umständen die Transformation auf das gemeinsame System mühsam.

Wir wollen hier einen anderen Weg einschlagen[4], bei dem diese Transformation überhaupt vermieden wird, und auf dem auch allgemeiner geformte Rotationsschalen für Einzellasten berechnet werden können (vgl. Anhang).

2. Aufstellung der Differentialgleichungen und ihre allgemeine Integration. a) Die Grundgleichungen. Wir stellen zunächst das den Membranzustand der Kugelschale beherrschende Gleichungssystem zusammen. Wir setzen konstante Wandstärke h voraus. Die Mittelfläche der Schale habe den Halbmesser a. Wir bezeichnen im Punkt $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ der Schalenmittelfläche mit $\mathfrak{t}_1$ den Einheitsvektor in Richtung der Meridiantangente im Sinne wachsender ϑ_1, mit $\mathfrak{t}_2$ den Einheitsvektor in Richtung der Breitenkreistangente im Sinne wachsender ϑ_2. Weiter sei $\mathfrak{t}_3$ der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen, positiv so, daß $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ ein Rechtssystem bilden; $\mathfrak{t}_3$ zeigt bei dieser Festlegung ins Innere der Kugel. Weiter seien $ds_{01} = a\,d\vartheta_1$ und $ds_{02} = a\cos\vartheta_1\,d\vartheta_2$ die Seiten eines von den Meridianen ϑ_2 und $\vartheta_2 + d\vartheta_2$ und den Breitenkreisen ϑ_1 und $\vartheta_1 + d\vartheta_1$ begrenzten Flächenelementes (Abb. 1). Dann wird durch ein Breitenkreiselement die Schnittkraft

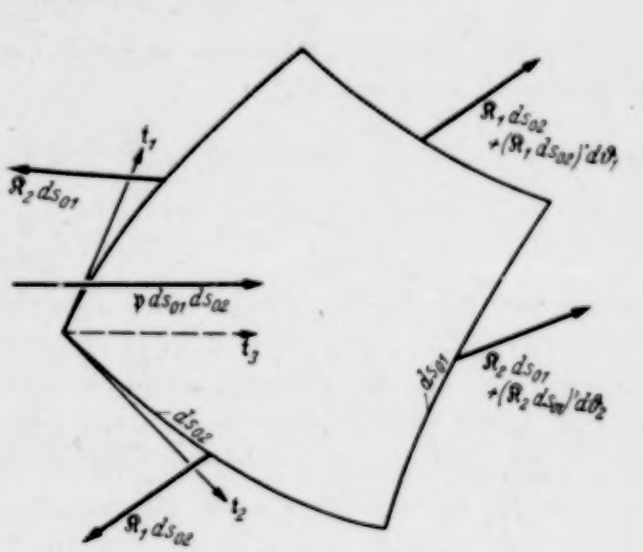

Abb. 1. Element mit Schnittkräften und Belastung.

$$\mathfrak{N}_1\,ds_{02} = (K_{11}\mathfrak{t}_1 + K_{12}\mathfrak{t}_2)\,ds_{02}$$

übertragen, durch ein Meridianelement die Schnittkraft

$$\mathfrak{N}_2\,ds_{01} = (K_{21}\mathfrak{t}_1 + K_{22}\mathfrak{t}_2)\,ds_{01}\,.$$

---

[1] *Fr. Dischinger*, Bauing. 16 (1935) S. 374 und S. 393.
[2] *H. Reißner*, Müller-Breslau-Festschrift, S. 181. Leipzig 1912.
[3] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, S. 40. Berlin 1934.
[4] Für Rat und Hilfe ist dabei der Verfasser Herrn Professor Dr. *H. Fromm* zu Dank verpflichtet.

Wir wollen wie üblich K_{11} die Meridiankraft, K_{22} die Ringkraft und $K_{12}=K_{21}$ die Schubkraft nennen. Zu diesen Schnittkräften gehören die Dehnungen ε_1 und ε_2 sowie die Gleitung γ_{12}. Die Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche soll durch Angabe des Vektors

$$\mathfrak{u} = u_1 \mathfrak{t}_1 + u_2 \mathfrak{t}_2 + u_3 \mathfrak{t}_3$$

beschrieben werden. Ferner sei eine Flächenbelastung gegeben:

$$\mathfrak{p} = p_1 \mathfrak{t}_1 + p_2 \mathfrak{t}_2 + p_3 \mathfrak{t}_3 .$$

Die Gleichgewichtsbedingung für das Element (Abb. 1) liefert die Vektorgleichung

$$\frac{\partial (\mathfrak{R}_1 \, d s_{02})}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{\partial (\mathfrak{R}_2 \, d s_{01})}{\partial \vartheta_2} d\vartheta_2 + \mathfrak{p} \, d s_{01} \, d s_{02} = 0 . \tag{1}$$

die mit den drei Aussagen für die Komponenten in den Richtungen $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ gleichwertig ist[1]:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{K}_{11} - K_{11} \operatorname{tg}\vartheta_1 + \frac{K'_{21}}{\cos\vartheta_1} + K_{22} \operatorname{tg}\vartheta_1 + a p_1 = 0 , \\ &\dot{K}_{12} - 2 K_{12} \operatorname{tg}\vartheta_1 + K'_{22} + a p_2 = 0 , \\ &K_{11} + K_{22} + a p_3 = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei Punkte Ableitungen nach ϑ_1, Striche Ableitungen nach ϑ_2 bedeuten.

Die Bedingung dafür, daß der geometrische Zusammenhang bei der Formänderung erhalten bleibt, liefert die drei bekannten Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen[2]

$$\left.\begin{aligned} &\dot{u}_1 - u_3 = a \varepsilon_1 , \\ &\frac{u'_2}{\cos\vartheta_1} - u_1 \operatorname{tg}\vartheta_1 - u_3 = a \varepsilon_2 , \\ &\dot{u}_2 + \frac{u'_1}{\cos\vartheta_1} + u_2 \operatorname{tg}\vartheta_1 = a \gamma_{12} . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Zwischen den Schnittkräften und den Verzerrungen besteht das *Hooke*sche Gesetz (E Elastizitätsmodul, ν Poissonzahl)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh} (K_{11} - \nu K_{22}) , \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh} (K_{22} - \nu K_{11}) , \\ \gamma_{12} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} K_{12} . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

b) Integration der Gleichgewichtsbedingungen. Bei Membranschalen können die Schnittkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen (2) vollständig bestimmt werden. Wir formen (2) um, indem wir mit Hilfe der dritten Gleichung K_{22} eliminieren; multiplizieren wir noch mit $\cos^2\vartheta_1$, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\dot{K}_{11}\cos^2\vartheta_1 - 2K_{11}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + K'_{21}\cos\vartheta_1 + a(p_1\cos^2\vartheta_1 - p_3\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1) = 0 ,$$

$$\dot{K}_{12}\cos^2\vartheta_1 - 2K_{12}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 - K'_{11}\cos\vartheta_1 + a(p_2\cos^2\vartheta_1 - p'_3\cos\vartheta_1) = 0 .$$

Dafür kann man schreiben

$$\left.\begin{aligned} &\cos\vartheta_1 (K_{11}\cos^2\vartheta_1)^{\cdot} + (K_{21}\cos^2\vartheta_1)' + a\cos^3\vartheta_1 (p_1 - p_3 \operatorname{tg}\vartheta_1) = 0 , \\ &\cos\vartheta_1 (K_{12}\cos^2\vartheta_1)^{\cdot} - (K_{11}\cos^2\vartheta_1)' + a\cos^2\vartheta_1 (p_2\cos\vartheta_1 - p'_3) = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir suchen nun eine unabhängige Variable $y = f(\vartheta_1)$ so, daß

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos\vartheta_1 \frac{\partial}{\partial \vartheta_1}$$

wird. Es muß also gelten

$$dy = \frac{d\vartheta_1}{\cos\vartheta_1} .$$

Daraus folgt

$$y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_1}{2}\right) . \tag{6a}$$

---

[1] Vgl. z. B. *W. Flügge*, a. a. O. Formel (12a–c), S. 21–24.
[2] Vgl. z. B. *W. Flügge*, a. a. O. Formel (25a–c), S. 52 und 53.

Setzen wir noch

$$x = \vartheta_2 , \tag{6b}$$

so wird durch (6) die Kugelfläche auf die Ebene (x, y) abgebildet, derart, daß der Äquator in die x-Achse zwischen $2k\pi$ und $2(k+1)\pi$ $(k=0, 1, 2\ldots)$, die beiden Pole ins Unendliche fallen. Die Abbildung ist die aus der Kartenkunde bekannte Merkatorprojektion. Sie ist winkeltreu (konform).

Aus (6a) erhalten wir für die Winkelfunktionen

$$\cos\vartheta_1 = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, y} , \qquad \sin\vartheta_1 = \mathfrak{Tg}\, y . \tag{7}$$

Führen wir nun noch neue Unbekannte

$$K_{11}\cos^2\vartheta_1 = N_1 , \qquad K_{12}\cos^2\vartheta_1 = N_2 \tag{8}$$

ein, so erhalten wir statt (5)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{a}{\mathfrak{Cof}^3 y}(p_1 - p_3\,\mathfrak{Sin}\, y) = 0 , \\ &\frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{a}{\mathfrak{Cof}^3 y}\left(p_2 - \frac{\partial p_3}{\partial x}\mathfrak{Cof}\, y\right) = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Da als Belastung nur Punktlasten interessieren, setzen wir p_1, p_2, p_3 Null und erhalten für die Schnittkräfte die *Cauchy-Riemann*-Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_2}{\partial x} = 0 , \\ &\frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wir können also N_1 und N_2 als Real- und Imaginärteil einer Funktion M der komplexen Variablen $z = x + iy$ ansehen:

$$M(z) = N_1(x, y) + i\,N_2(x, y) , \tag{11}$$

wobei N_1 und N_2 Potentialfunktionen sind.

Damit ist eine allgemeine Aussage über den Spannungszustand der Membrankugelschale gewonnen. Jeder Tensor

$$\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & -K_{11} \end{Vmatrix} ,$$

dessen nach (8) mit $\cos^2\vartheta_1$ multiplizierte Komponenten Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion (11) sind, gibt einen möglichen Spannungszustand der Schale an, die nur an den Rändern oder an Einzelpunkten belastet ist.

c) Integration der Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen. Ähnlich den Gleichgewichtsbedingungen können auch die Gleichungen (3) umgeformt werden. Wir eliminieren mit der zweiten Gleichung (3) u_3 aus der ersten und erhalten

$$\dot{u}_1 + u_1\,\mathrm{tg}\,\vartheta_1 - \frac{u_2'}{\cos\vartheta_1} = a(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) ,$$

$$\dot{u}_2 + u_2\,\mathrm{tg}\,\vartheta_1 + \frac{u_1'}{\cos\vartheta_1} = a\gamma_{12}$$

oder etwas umgeformt

$$\cos\vartheta_1\left(\frac{u_1}{\cos\vartheta_1}\right)^{\cdot} - \left(\frac{u_2}{\cos\vartheta_1}\right)' = a(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) ,$$

$$\cos\vartheta_1\left(\frac{u_2}{\cos\vartheta_1}\right)^{\cdot} + \left(\frac{u_1}{\cos\vartheta_1}\right)' = a\gamma_{12} .$$

Mit der Substitution (6) und den neuen Unbekannten

$$\frac{u_1}{\cos\vartheta_1} = v_1 , \qquad -\frac{u_2}{\cos\vartheta_1} = v_2 \tag{12}$$

ergibt sich statt (3) die einfache Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{d x} = a(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) , \\ &\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = -a\gamma_{12} . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Insbesondere erhalten wir für die dehnungslose Formänderung v_{10}, v_{20} bei $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\gamma_{12}=0$ die *Cauchy-Riemann*-Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_{10}}{\partial y}+\frac{\partial v_{20}}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial v_{20}}{\partial y}-\frac{\partial v_{10}}{\partial x}&=0\end{aligned}\right| \tag{14}$$

und damit die Aussage: Real- und Imaginärteil jeder analytischen Funktion

$$w_0(z)=v_{10}(x,y)+iv_{20}(x,y) \tag{15}$$

gibt bis auf einen Faktor nach (12) eine dehnungslose Formänderung der Kugelschale an; v_{10} und v_{20} sind Potentialfunktionen.

Partikulare Integrale der vollständigen Gleichungen (13) berechnen wir wie folgt. Wir eliminieren

entweder	oder
v_1	v_2

und erhalten für

v_2	v_1

die Gleichung

$$\left|\begin{aligned}\Delta v_2&=a\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_{12}\right]\end{aligned}\right| \qquad \left|\begin{aligned}\Delta v_1&=a\left[\frac{\partial}{\partial x}\gamma_{12}+\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right].\end{aligned}\right| \tag{16}$$

Dann ergibt sich

v_1	v_2

aus dem wegen (16) vom Weg unabhängigen Linienintegral

$$\left|\begin{aligned}v_1&=\int_{x_0,y_0}^{x,y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}dx+\frac{\partial v_1}{\partial y}dy\right)\\ &=\int_{x_0,y_0}^{x,y}\left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial y}+a\gamma_{12}\right)dx+\left(-\frac{\partial v_2}{\partial x}+a(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right)dy\right]\end{aligned}\right| \qquad \left|\begin{aligned}v_2&=\int_{x_0,y_0}^{x,y}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}dx+\frac{\partial v_2}{\partial y}dy\right)\\ &=\int_{x_0,y_0}^{x,y}\left(-\frac{\partial v_1}{\partial y}+a(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right)dx+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}-a\gamma_1\right)dx\Big].\end{aligned}\right| \tag{17}$$

Für den Sonderfall, daß nur Randlasten oder Punktbelastungen auftreten, wollen wir (16) und (17) noch etwas weiter ausrechnen. Aus (4) und der dritten Gleichung (2) folgt dann

$$a(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\frac{a(1+\nu)}{Eh}(K_{11}-K_{22})=\frac{2a(1+\nu)}{Eh}K_{11},$$

$$a\gamma_{12}=\frac{2a(1+\nu)}{Eh}K_{12}$$

oder mit (7) und (8)

$$\left.\begin{aligned}a(\varepsilon_1-\varepsilon_2)&=\frac{2a(1+\nu)}{Eh}N_1\operatorname{Cof}^2 y=N_1 f(y),\\ a\gamma_{12}&=\frac{2a(1+\nu)}{Eh}N_2\operatorname{Cof}^2 y=N_2 f(y).\end{aligned}\right| \tag{18}$$

Einsetzen in (16) ergibt dann wegen (10)

$$\left|\begin{aligned}\Delta v_2&=-\frac{2a(1+\nu)}{Eh}N_2\operatorname{Sin}2y\end{aligned}\right| \qquad \left|\begin{aligned}\Delta v_1&=-\frac{2a(1+\nu)}{Eh}N_1\operatorname{Sin}2y.\end{aligned}\right| \tag{19}$$

Ferner wird (17) mit (18)

$$\left|\begin{aligned}v_1&=\int_{x_0,y_0}^{x,y}\left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial y}+N_2 f(y)\right)dx+\right.\\ &\qquad\left.+\left(-\frac{\partial v_2}{\partial x}+N_1 f(y)\right)dy\right]\end{aligned}\right| \qquad \left|\begin{aligned}v_2&=\int_{x_0,y_0}^{x,y}\left[\left(-\frac{\partial v_1}{\partial y}+N_1 f(y)\right)dx+\right.\\ &\qquad\left.+\left(-N_2 f(y)+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)dy\right].\end{aligned}\right| \tag{20}$$

d) Mechanische Analogien. Die Gleichgewichtsbedingungen (9) und die Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen (13) sind mathematisch dieselben Gleichungen. Wie im Anhang gezeigt wird, gilt diese Tatsache allgemein für Drehflächen. Wir können also die für den Stab bekannte *Mohr*sche Analogie zwischen Momentenlinie

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p$$

und Biegelinie

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\varkappa=-\frac{M}{EJ}$$

auf Rotationsschalen übertragen und die Verschiebungen in (13) als Schnittkräfte deuten und aus Belastungen (in der Sprache des Bauingenieurs: W-Gewichten) p_1, p_2, p_3 berechnen, die sich aus den Dehnungen ergeben, etwa nach

$$p_1 = -\mathfrak{Cof}^3 y\,\varepsilon_1 ,$$
$$p_3 = -\mathfrak{Sin}\, y\,\mathfrak{Cof}^3 y\,\varepsilon_2 ,$$
$$p_2 = \mathfrak{Cof}^3 y\,\gamma_{12} + \frac{\partial p_3}{\partial x}\,\mathfrak{Cof}\, y .$$

Bei der Kugelschale lohnt es nicht, diese Analogie für die Berechnung der Verschiebungen auszunutzen. Die Parallele zum Stab wird uns später noch einmal von Nutzen sein. Bei Drehschalen mit beliebiger Meridianform kann man mit ihrer Hilfe Verschiebungen nach einer der für die Ermittlung der Schnittkräfte ausgebildeten Methoden berechnen[1].

Wegen der Übereinstimmung der Gleichungen (14) und (10) können alle Verschiebungszustände, die dehnungslosen Formänderungen entsprechen, als Schnittkraftdiagramme gedeutet werden und umgekehrt. Auch diese Aussage gilt für alle Drehflächen.

Daß zwischen Spannungszuständen der Membranschalen (ohne Flächenlasten) und ihren dehnungslosen Formänderungen enge Beziehungen bestehen, ist bekannt[2]. Und zwar lassen sich ganz allgemein zu jeder Schalenmittelfläche Drehrisse angeben, aus denen man die Drehung eines Flächenelementes bei dehnungsloser Formänderung ablesen kann. Jeder Drehriß läßt sich nun als Kräfteplan eines möglichen Membranspannungszustandes deuten. Darauf hat *M. Lagally* ein Integrationsverfahren der Schalengleichungen aufgebaut, nach dem zur Berechnung der Schnittkräfte und der Verschiebungen im Prinzip ein und dieselbe charakteristische Gleichung zu lösen ist. Demgegenüber ist das oben gefundene Ergebnis weniger allgemein, da es nur für Drehflächen abgeleitet ist, aber weitergehend, da die Übereinstimmung sogar der Gleichgewichtsbedingungen und Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen die mechanische Analogie zum Stabe ermöglicht und überhaupt die Differentialgleichungen für die Schnittkräfte und Verschiebungen so umgeformt sind, daß sie leicht direkt gelöst werden können.

Es sei noch eine weitere Analogie, nämlich zum ebenen Spannungszustand, erwähnt. Dort sind die mittlere Verdrehung eines Flächenelementes und die Summe der Normalspannungen zueinander konjugierte Potentialfunktionen[3], wie bei der Kugelschale die Schnittkräfte N_1 und N_2. Es kann also jede für den ebenen Spannungszustand gefundene Lösung in eine entsprechende Schalenlösung umgerechnet werden.

3. Spannungszustände der Kugelschale unter Einzellasten. a) Die Lösung von *Reißner*. Wir erhalten die in der Einleitung besprochene Lösung von *H. Reißner*, wenn wir für die analytische Funktion (11) entweder $c_1 \sin nz$ oder $c_2 \cos nz$ annehmen mit komplexen Konstanten c und reellem ganzzahligem $n > 0$. Für diesen Ansatz ergeben sich die Schnittkräfte

$$N_1 = \Re\mathfrak{e}(c_1 \sin nz + c_2 \cos nz) = \sin nx(a_1 \mathfrak{Cof}\, ny + b_2 \mathfrak{Sin}\, ny) + \cos nx(-b_1 \mathfrak{Sin}\, y + a_2 \mathfrak{Cof}\, ny),$$
$$N_2 = \Im\mathfrak{m}(c_1 \sin nz + c_2 \cos nz) = \sin nx(b_1 \mathfrak{Cof}\, ny - a_2 \mathfrak{Sin}\, ny) + \cos nx\,(b_2 \mathfrak{Cof}\, ny + a_1 \mathfrak{Sin}\, ny).$$

Die Lösung ist in der Ebene (x, y) mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes regulär, also auf der ganzen Kugel mit Ausnahme der Pole. Sie braucht hier nicht weiter diskutiert zu werden; über die in ihr enthaltenen Punktbelastungen an den Polen vgl. die Einleitung.

b) Lösungen für Einzellasten am Äquator bei Stützung an den Polen. 1) Einzellast im Punkt ($\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$) in Richtung der Äquatortangente. Um eine solche Kraftwirkung zu beschreiben, wählen wir die analytische Funktion $M(z)$ so, daß sie auf der x-Achse für $x = \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2 \ldots$) wie $1/z$ unendlich wird und sonst in der ganzen z-Ebene regulär ist. Das leistet der Ansatz[4]

$$M(z) = \operatorname{ctg} \frac{z}{2} . \tag{21}$$

[1] Vgl. z. B. *W. Flügge*, a. a. O. S. 47.
[2] Vgl. z. B. *M. Lagally*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 377 und die dort angegebene Literatur.
[3] Vgl. z. B. *E. Treffitz*, Mathematische Elastizitätstheorie, Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 109 bis 113.
[4] Eigentlich berechnen wir nach diesem Ansatz Einflußzahlen für N und K. Diese Zahlen werden Schnittkräfte erst durch Multiplikation mit einer Größe der Dimension Kraft/Länge, die wir als multiplikative Konstante in (21) hinzufügen könnten, und die dann aus der gegebenen Belastung zu berechnen wäre. Auf das Mitschleppen dieser Konstanten wurde verzichtet und die Einflußzahl der Schnittkraft kurz immer nur mit Schnittkraft bezeichnet.

Sein Real- und Imaginärteil ist

$$N_1(x, y) = -\frac{\sin x}{\cos x - \mathfrak{Cof}\, y}, \qquad N_2(x, y) = \frac{\mathfrak{Sin}\, y}{\cos x - \mathfrak{Cof}\, y}. \tag{22}$$

Mit (7) erhält man die Schnittkräfte zu

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &= \frac{N_1}{\cos^2\vartheta_1} = \frac{1}{\cos\vartheta_1}\,\frac{\sin\vartheta_2}{(1-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)}, \\ K_{12} &= \frac{N_2}{\cos^2\vartheta_1} = -\frac{1}{\cos^2\vartheta_1}\,\frac{\sin\vartheta_1}{(1-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Diese werden außer bei $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ auch an den Polen $\vartheta_1 = \pm\pi/2$ unendlich. Es stehen also drei Kraftwirkungen an diesen drei Stellen miteinander im Gleichgewicht.

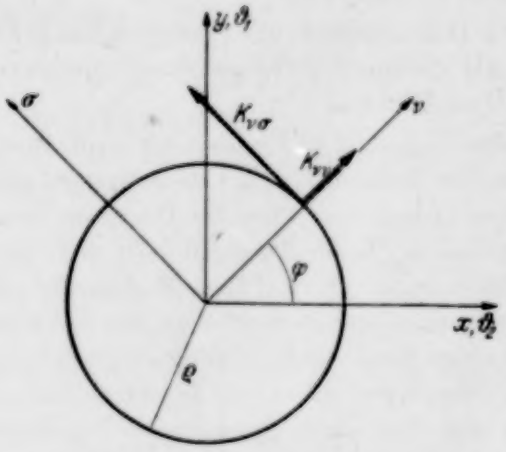

Abb. 2. Spannungszustand in der Umgebung der Lastangriffsstelle am Äquator.

Wir untersuchen nun zunächst den Spannungszustand in der Nähe der Lastangriffsstelle am Äquator. Wir berechnen dazu die Resultierende der Schnittkräfte an einer kleinen Kugelkalotte, die durch einen Kreis mit dem Halbmesser ϱ um die Lastangriffsstelle herausgeschnitten wird (Abb. 2). Für alle Punkte nahe dem Äquator ($\vartheta_1 \ll 1$) gilt $K_{11} \approx N_1$, $K_{12} \approx N_2$. Ferner verhalten sich in der Nähe des Lastangriffes die Schnittkräfte nach (21) wie $1/z$, also wie $1/\varrho$. Da der Öffnungswinkel der Kalotte proportional ϱ ist, verhält sich die Schnittkraftkomponente senkrecht zur Ebene des Kalottengrundkreises wie ϱ/ϱ. Die Integration über den Umfang dieses Kreises ergibt also keine Resultierende normal zur Kugelfläche und erst recht kein resultierendes Moment um irgendeine in die Grundkreisebene fallende Achse, wenn ϱ nach Null geht. Wir können uns also auf die Betrachtung der in die Grundkreisebene fallenden Komponenten der Schnittkräfte $K_{\nu\nu}$, $K_{\nu\sigma}$ am Rand der Kugelkalotte beschränken und berechnen sie als Funktion des Winkels φ genau wie die Schnittkräfte $K_{\nu\nu}$, $K_{\nu\sigma}$ des ebenen Spannungszustandes in einem gegen x, y gedrehten System (ν, σ):

$$\left.\begin{aligned} K_{\nu\nu} &= K_{22}\cos^2\varphi + 2\,K_{12}\cos\varphi\sin\varphi + K_{11}\sin^2\varphi \\ &= -K_{11}\cos 2\varphi + K_{12}\sin 2\varphi, \\ K_{\nu\sigma} &= -K_{22}\cos\varphi\sin\varphi + K_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + K_{11}\sin\varphi\cos\varphi \\ &= K_{11}\sin 2\varphi + K_{12}\cos 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Diese Schnittkräfte haben eine Resultierende in x-Richtung

$$X = \int_0^{2\pi} (K_{\nu\nu}\cos\varphi - K_{\nu\sigma}\sin\varphi)\,\varrho\,d\varphi$$

und in y-Richtung

$$Y = \int_0^{2\pi} (K_{\nu\nu}\sin\varphi + K_{\nu\sigma}\cos\varphi)\,\varrho\,d\varphi. \tag{25}$$

Da sich $K_{\nu\nu}$ und $K_{\nu\sigma}$ am Lastangriff wie $1/\varrho$ verhalten, bleiben X und Y endlich, wenn ϱ nach Null geht, dagegen verschwindet dann ein resultierendes Moment aus den Schnittkräften.

Wir berechnen nun K_{11} und K_{12} aus (22), indem wir nach Potenzen von x und y entwickeln und Glieder höherer Ordnung streichen:

$$(K_{11})_{\vartheta_1=\vartheta_2=0} \approx \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad (K_{12})_{\vartheta_1=\vartheta_2=0} \approx -\frac{2y}{x^2+y^2} \tag{26}$$

oder mit $x = \dfrac{\varrho\cos\varphi}{a}$, $y = \dfrac{\varrho\sin\varphi}{a}$

$$(K_{11})_0 = \frac{2a\cos\varphi}{\varrho}, \qquad (K_{12})_0 = -\frac{2a\sin\varphi}{\varrho}. \tag{27}$$

Dann folgt aus (24) und (25)

$$X = \int_0^{2\pi} -\frac{2a}{\varrho}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\varrho\,d\varphi = -4a\pi. \tag{28}$$

während für Y aus (25) der Integrand identisch verschwindet. Der Ansatz (21) liefert also den Spannungszustand für eine äußere Einzellast in Richtung der positiven x-Achse.

Die Stützkräfte und Momente, die dieser Last das Gleichgewicht halten, finden wir, wenn wir die Schnittkräfte in der Umgebung der Pole näher untersuchen. Wir führen dazu die Poldistanz $\psi_1=(\pi/2)-\vartheta_1$ ein (Abb. 3) und schreiben (23) gültig für die Umgebung des Nordpols in der Form

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &\approx \frac{1}{\psi_1}\sin\vartheta_2\,, \\ K_{12} &\approx -\frac{1}{\psi_1^2}\,\frac{1}{(1-\psi_1\cos\vartheta_2)} \approx -\frac{1}{\psi_1^2}\,(1+\psi_1\cos\vartheta_2) = -\left[\frac{1}{\psi_1^2}+\frac{1}{\psi_1}\cos\vartheta_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die Lösung besteht aus einem drehsymmetrischen Anteil, der wie $1/\psi_1^2$ unendlich wird und einem nach der ersten Harmonischen von ϑ_2 verlaufenden Anteil, der wie $1/\psi_1$ unendlich wird. Wir

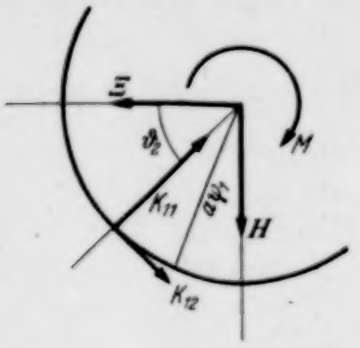

Abb. 3. Kräftebild am Nordpol.

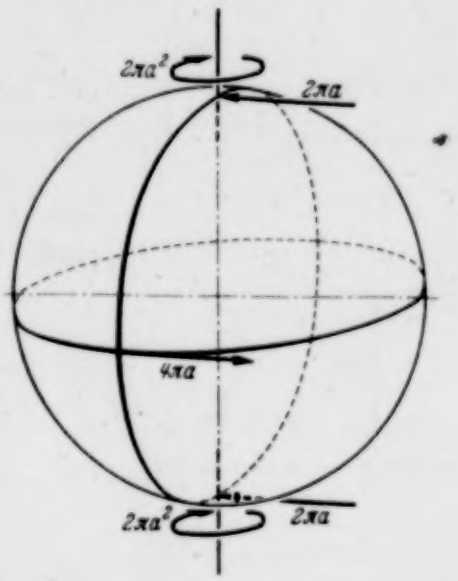

Abb. 4. Belastung 3 b) 1) mit den Stützkräften und -momenten an den Polen.

schneiden eine kleine Kalotte um den Nordpol aus und fassen die drehsymmetrischen Schubkräfte am Schalenrand zu einem Moment um die Nord-Süd-Achse zusammen, das im Sinne abnehmender ϑ_2 dreht und den Betrag

$$M=\frac{1}{\psi_1^2}\,2\,\pi a\,\psi_1\,a\,\psi_1=2\,\pi a^2 \tag{30}$$

hat. Es hebt zusammen mit einem entsprechenden Moment am Südpol das Moment der angreifenden Kraft gerade auf. Die wie $1/\psi_1$ unendlich werdenden Anteile geben eine Kraft H in der Tangentialebene am Pol, und zwar nur in Richtung der Meridianebene $\vartheta_2=\pm\pi/2$. Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} H &= a\int_0^{2\pi}(-K_{11}\sin\vartheta_2+K_{12}\cos\vartheta_2)\,\psi_1\,d\vartheta_2 \\ &= -a\int_0^{2\pi}\frac{1}{\psi_1}\,(\sin^2\vartheta_2+\cos^2\vartheta_2)\,\psi_1\,d\vartheta_2=-2\,a\pi\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Diese Stützkraft hält zusammen mit einer entsprechenden Kraft am Südpol und den Momenten (30) der am Äquator angreifenden Kraft (28) das Gleichgewicht (Abb. 4).

2. Einzellast im Punkt ($\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=0$) in Richtung der Meridiantangente. Der Rechnungsgang ist der gleiche wie vorher. Wir wollen nur die Ergebnisse zusammenstellen. Die analytische Funktion ist hier

$$M(z)=i\,\mathrm{ctg}\,\frac{z}{2} \tag{32}$$

mit

$$N_1=-\frac{\mathfrak{Sin}\,y}{\cos x-\mathfrak{Cof}\,y}\,,\qquad N_2=-\frac{\sin x}{\cos x-\mathfrak{Cof}\,y} \tag{33}$$

oder

$$K_{11}=\frac{\sin\vartheta_1}{\cos^2\vartheta_1(1-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)}\,,\qquad K_{12}=\frac{\sin\vartheta_2}{\cos\vartheta_1(1-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)}\,. \tag{34}$$

Die Entwicklung am Lastangriff am Äquator liefert

$$(K_{11})_0 = \frac{2a\sin\varphi}{\varrho}, \qquad (K_{12})_0 = \frac{2a\cos\varphi}{\varrho}. \tag{35}$$

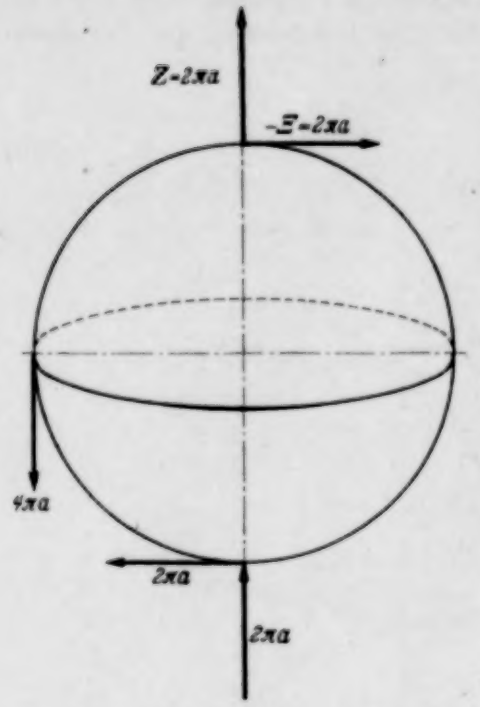

Abb. 5. Belastung 3 b) 2) mit den Stützkräften an den Polen.

Dazu gehört eine Kraft im Punkt ($\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=0$) in Richtung der negativen y-Achse von der Größe

$$Y = 4\pi a .$$

Ihr wird von einer Kraft am Nordpol in Richtung der Nord-Süd-Achse

$$Z = 2\pi a$$

und einer in der Tangentialebene am Pol liegenden Kraft

$$\Xi = -2\pi a$$

und entsprechenden Kräften am Südpol das Gleichgewicht gehalten[1] (Abb. 5).

3) Einzellast im Punkt ($\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=0$) normal zur Schalenfläche. Die für diesen Lastfall geeignete analytische Funktion ist

$$M(z) = \frac{1}{1-\cos z} \tag{36}$$

mit dem Realteil und Imaginärteil

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{1-\cos x\,\mathfrak{Cof}\,y}{(\mathfrak{Cof}\,y-\cos x)^2}, \\ N_2 &= -\frac{\sin x\,\mathfrak{Sin}\,y}{(\mathfrak{Cof}\,y-\cos x)^2} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

und den Schnittkräften

$$K_{11} = \frac{1}{\cos\vartheta_1}\,\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2}{(1-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)^2}, \qquad K_{12} = -\frac{1}{\cos\vartheta_1}\,\frac{\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}{(1-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)^2}. \tag{38}$$

Die Entwicklung von N_1 und N_2 am Lastangriff ergibt

$$\left.\begin{aligned} (K_{11})_0 &= \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\varrho^2}\,a^2 = \frac{2\cos 2\varphi\, a^2}{\varrho^2}, \\ (K_{12})_0 &= -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2\sin 2\varphi\, a^2}{\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

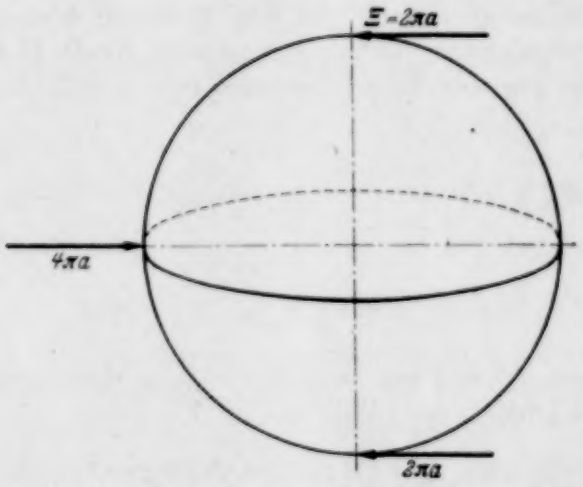

Abb. 6. Belastung 3 b) 3) mit den Stützkräften an den Polen.

Aus (24) erhalten wir

$$(K_{\nu\nu})_0 = -\frac{2a^2}{\varrho^2} \qquad (K_{\nu\sigma})_0 = 0 .$$

Da die Verteilung von $K_{\nu\nu}$ drehsymmetrisch ist, liefert nur die senkrecht auf der Tangentialebene im Lastangriff stehende Komponente eine Resultierende, und zwar von der Größe

$$Z = 2\frac{a}{\varrho^2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)2\pi\varrho = 4\pi a .$$

Sie ist ins Innere der Schale gerichtet. In der Umgebung des Nordpols finden wir aus (38)

$$K_{11} \approx -\frac{1}{\psi_1}\cos\vartheta_2, \qquad K_{12} \approx -\frac{1}{\psi_1}\sin\vartheta_2 ,$$

also eine Kraft

$$\Xi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\psi_1}(\cos^2\vartheta_2+\sin^2\vartheta_2)\,a\psi_1\,d\vartheta_2 = 2\pi a ,$$

die mit einer gleichen Kraft am Südpol gerade zum Gleichgewicht erforderlich ist (Abb. 6).

[1] In der Umgebung des Angriffes einer Normallast muß die Lösung für den Membranzustand durch eine Lösung für die biegesteife Schale ersetzt werden. Hierauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

4) Lastfall 3) in einem anderen Koordinatensystem. Für eine spätere Anwendung brauchen wir den in Abb. 7 skizzierten Lastfall, den wir aus den beiden Belastungen I und II (Abb. 7) aufbauen können. Es ist der Lastfall 3), nur in einem solchen Koordinatensystem, daß die Normallast jetzt an einem Pol angreift.

Lastfall I ergibt sich durch Überlagerung von zwei Lastfällen 2) mit Lastangriff an zwei sich gegenüber liegenden Äquatorpunkten. Er kann einfacher unmittelbar durch eine (21) entsprechende Funktion M mit der Periode π statt 2π dargestellt werden:

$$M(z) = i \operatorname{ctg} z\,, \tag{40}$$

$$N_1 = -\frac{\mathfrak{Sin}\, 2y}{\cos 2x - \mathfrak{Cof}\, 2y}\,, \qquad N_2 = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \mathfrak{Cof}\, 2y} \tag{41}$$

und

$$K_{11} = \frac{2}{\cos^2\vartheta_1}\,\frac{\sin\vartheta_1}{[(1+\sin^2\vartheta_1) - \cos^2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_2]}\,, \qquad K_{12} = \frac{\sin 2\vartheta_2}{(1+\sin^2\vartheta_1) - \cos^2\vartheta_1\cos 2\vartheta_2}\,. \tag{42}$$

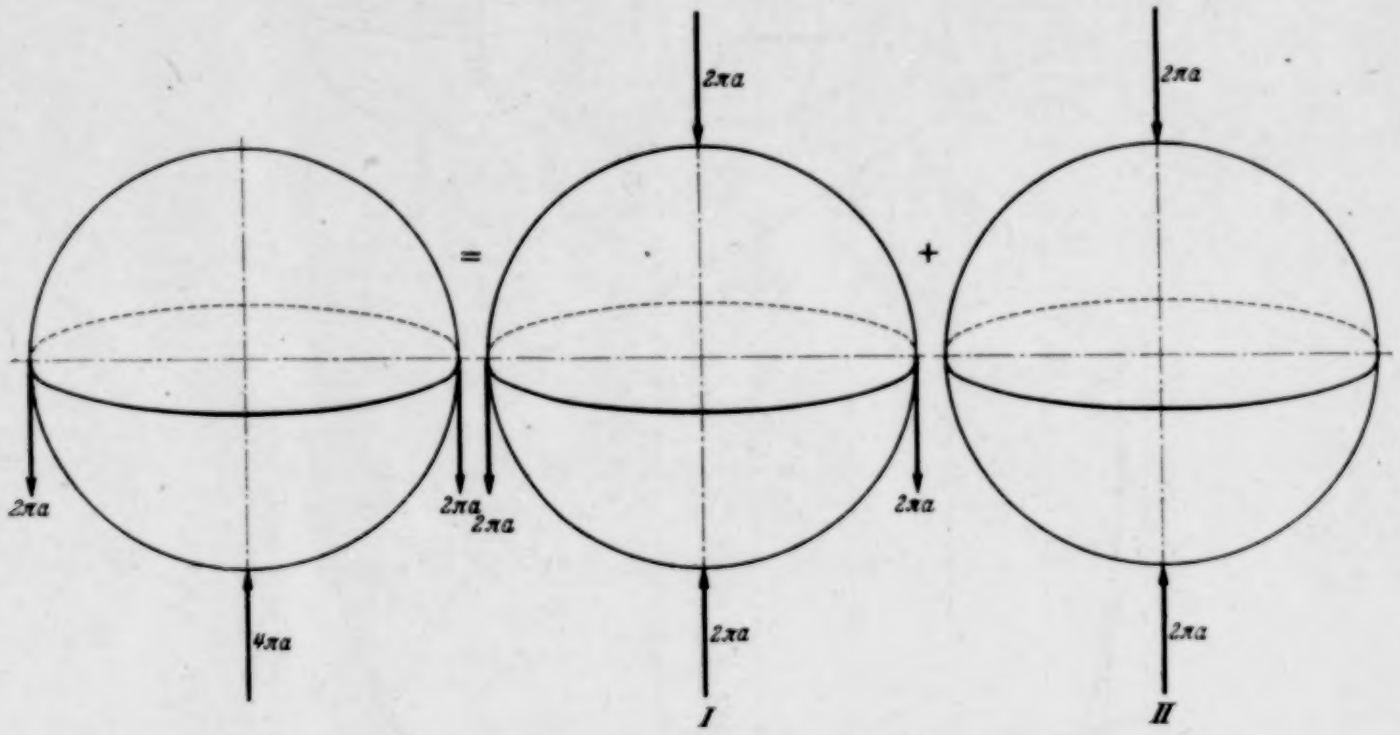

Abb. 7. Belastung 3 b) 4) und Aufteilung in Lastfall I und II.

In der Nähe des Lastangriffes am Äquator in den Punkten $(\vartheta_1 = 0,\ \vartheta_2 = 0)$ und $(\vartheta_1 = 0,\ \vartheta_2 = \pi)$ sind die Schnittkräfte

$$(K_{11})_0 = \frac{2y}{\frac{4y^2}{2} + \frac{4x^2}{2}} = \frac{a\sin\varphi}{\varrho}\,, \qquad (K_{12})_0 = \frac{2x}{\frac{4y^2}{2} + \frac{4x^2}{2}} = \frac{a\cos\varphi}{\varrho}\,. \tag{43}$$

Der Vergleich mit (35) ergibt, daß die angreifenden Kräfte hier je die Größe $2\pi a$ haben und tangential in Meridianrichtung zum Südpol hin wirken. Entsprechend findet man aus (42) eine Zugkraft am Nordpol von der Größe

$$Z = 2\pi a$$

und eine gleich große Druckkraft am Südpol, die das Gleichgewicht liefern.

Lastfall II ist die drehsymmetrische *Reißner*sche Lösung

$$K_{11} = -\frac{1}{\cos^2\vartheta_1}\,, \qquad K_{12} = 0\,.$$

Überlagert man ihn dem Lastfall I, so verschwindet die Zugkraft Z am Nordpol. Die Schnittkräfte werden dort regulär, im Südpol wirkt eine Druckkraft $4\pi a$.

5) Darstellung von Ergebnissen. Für die drei Grundtypen der Belastung durch Einzellasten **3**b) 1) bis 3) ist der Verlauf der Schnittkräfte über ϑ_1 und ϑ_2 in Abb. 8 bis 10 aufgetragen. Aus den Abbildungen geht hervor, wie die Spannungskonzentrationen an den Lastangriffsstellen sich ins Innere der Schale hinein ausbreiten. Die Spannungsspitzen in der Umgebung des Lastangriffs am Äquator sind innerhalb des Gebietes $-\pi/4 < \vartheta_2 < \pi/4$ und $-\pi/4 < \vartheta_1 < +\pi/4$ im wesentlichen ausgeglichen. In den anschließenden Breiten bis zu den Polen nehmen die Schnittkräfte jedoch wieder zu. Von $\vartheta_1 = \pi/4$ an wird das Spannungsbild überwiegend dadurch bestimmt, daß die Breitenkreise $\vartheta_1 = \text{konst.}$ immer kleineren Umfang haben, daß also die zum Übertragen

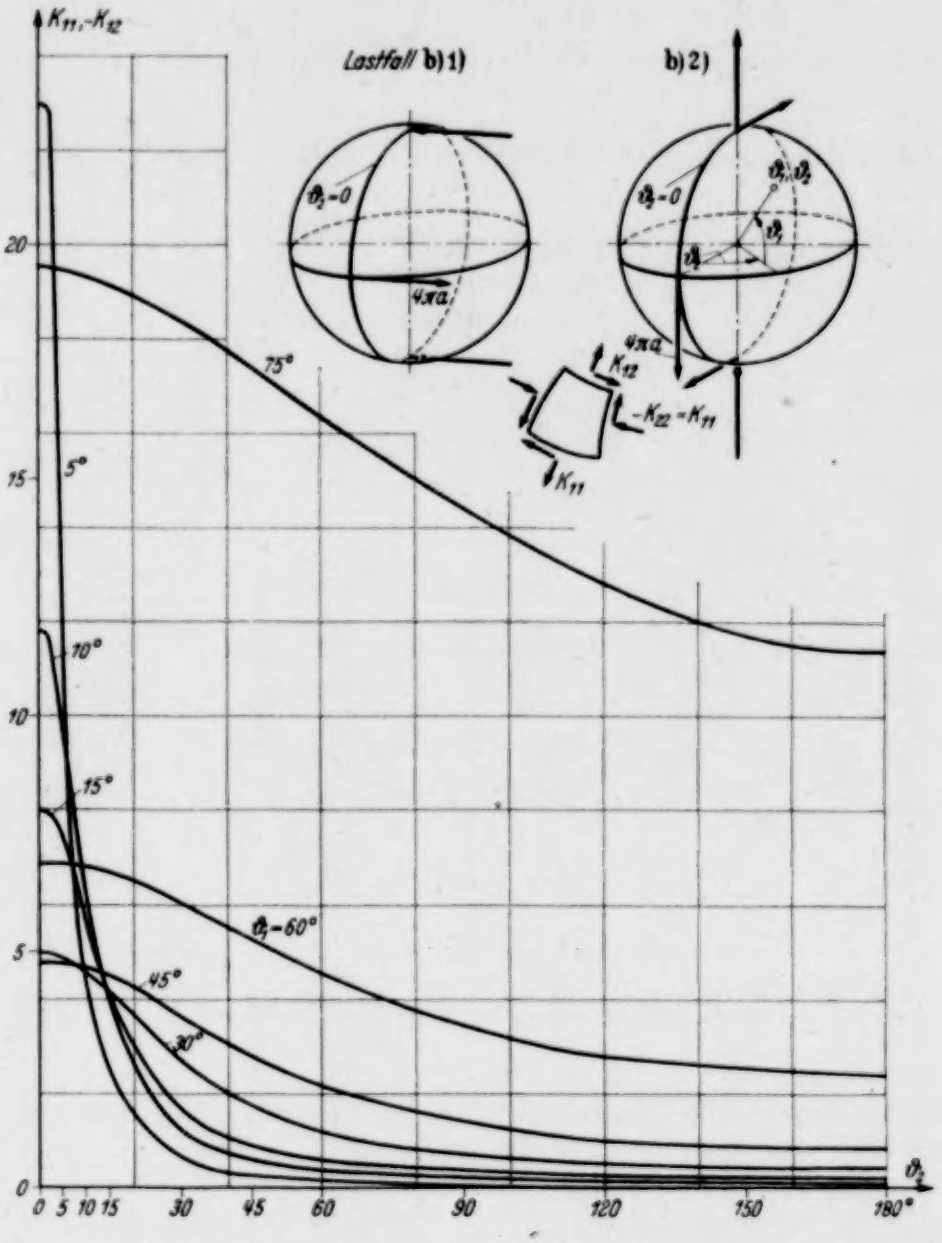

Abb. 8. Schubkraft $-K_{12}$ für Lastfall **3** b) 1) identisch mit Meridiankraft K_{11} für Lastfall **3** b) 2).

der Last vom Äquator nach den Polen zur Verfügung stehende Schnittfläche immer kleiner wird. In der Nachbarschaft der Pole entspricht der Verlauf den Formeln (29) und ähnlichen für die anderen Lastfälle.

c) Lösungen für Einzellasten an einem beliebigen Schalenpunkt (τ_1, τ_2) bei Stützung an den Polen. 1) Einzellast in Richtung der Breitenkreistangente. Ähnlich Lastfall **3**b) 1), Formel (21), setzen wir für eine am Schalenpunkt (τ_1, τ_2) angreifende Last mit

$$\xi = \tau_2, \qquad \eta = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_1}{2}\right), \qquad \zeta = \xi + i\eta \tag{44}$$

an

$$M(z) = \operatorname{ctg}\left(\frac{z-\zeta}{2}\right). \tag{45}$$

Daraus ergeben sich die Schnittkräfte

$$N_1 = -\frac{\sin(x-\xi)}{\cos(x-\xi)-\mathfrak{Cof}(y-\eta)}, \qquad N_2 = \frac{\mathfrak{Sin}(y-\eta)}{\cos(x-\xi)-\mathfrak{Cof}(y-\eta)}. \tag{46}$$

Für $\mathfrak{Cof}(y-\eta)$ setzen wir

$$\mathfrak{Cof}\, y\, \mathfrak{Cof}\, \eta - \mathfrak{Sin}\, y\, \mathfrak{Sin}\, \eta = \frac{1-\sin\vartheta_1 \sin\tau_1}{\cos\vartheta_1 \cos\tau_1} \tag{47a}$$

und für $\mathfrak{Sin}(y-\eta)$

$$\mathfrak{Sin}\, y\, \mathfrak{Cof}\, \eta - \mathfrak{Cof}\, y\, \mathfrak{Sin}\, \eta = \frac{\sin\vartheta_1 - \sin\tau_1}{\cos\vartheta_1 \cos\tau_1}. \tag{47b}$$

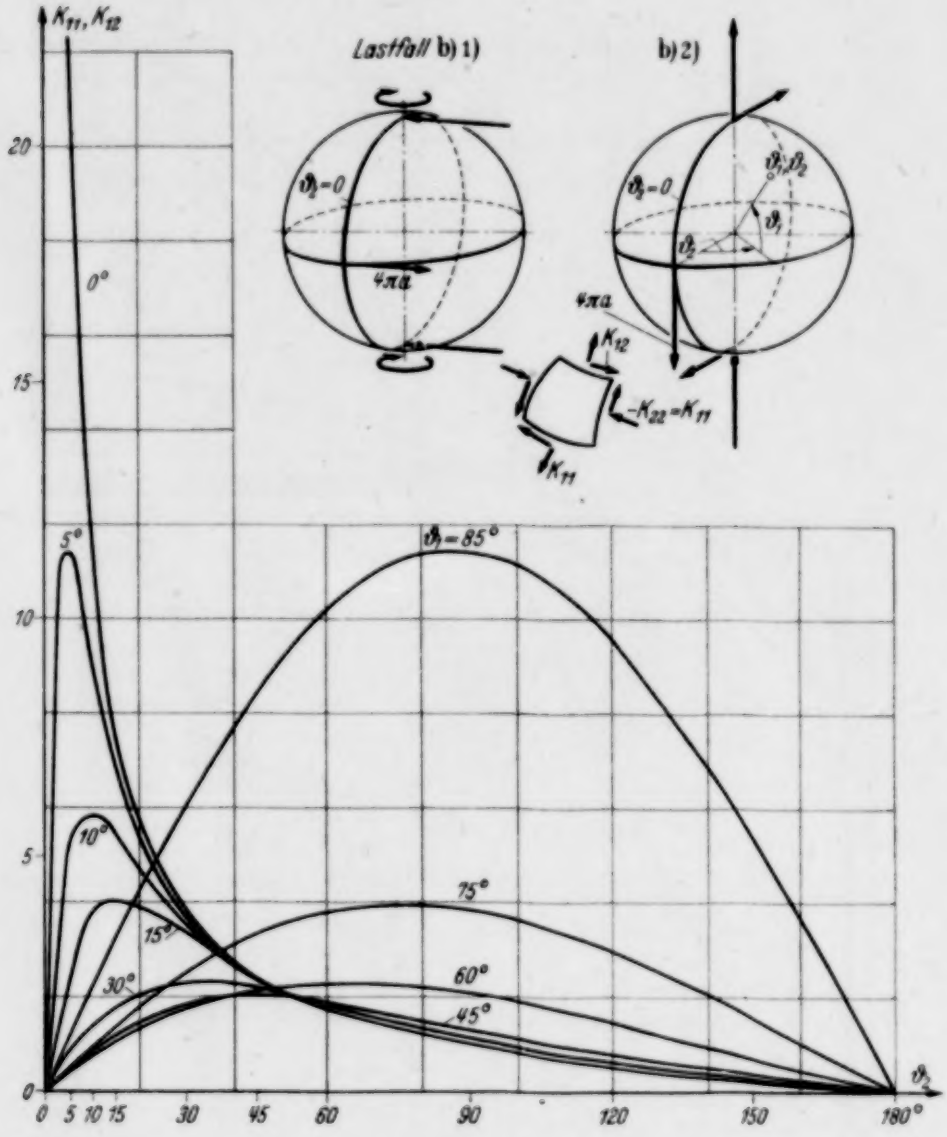

Abb. 9. Meridiankraft K_{11} für Lastfall **3** b) 1) identisch mit Schubkraft K_{12} für Lastfall **3** b) 2).

Damit erhalten wir die Schnittkräfte in den Koordinaten ϑ_1, ϑ_2

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &= -\frac{1}{\cos^2\vartheta_1}\,\frac{\sin(\vartheta_2-\tau_2)\cos\vartheta_1\cos\tau_1}{\cos\vartheta_1\cos\tau_1\cos(\vartheta_2-\tau_2)-(1-\sin\vartheta_1\sin\tau_1)}, \\ K_{12} &= \frac{1}{\cos^2\vartheta_1}\,\frac{\sin\vartheta_1-\sin\tau_1}{\cos\vartheta_1\cos\tau_1\cos(\vartheta_2-\tau_2)-(1-\sin\vartheta_1\sin\tau_1)}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Der Spannungszustand am Lastangriff wird

$$(K_{11})_0 = \frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \qquad (K_{12})_0 = -\frac{2(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \tag{49}$$

Die Umgebung der Lastangriffsstelle (τ_1, τ_2) sei nun durch die als klein anzusehenden Winkel

$$\lambda_1 = \vartheta_1 - \tau_1, \qquad \lambda_2 = \vartheta_2 - \tau_2 \tag{50}$$

beschrieben. Dann wird

$$x - \xi = \lambda_2 \tag{51a}$$

und aus einer Taylorentwicklung

$$y - \eta = \frac{\lambda_1}{\cos \tau_1} . \tag{51b}$$

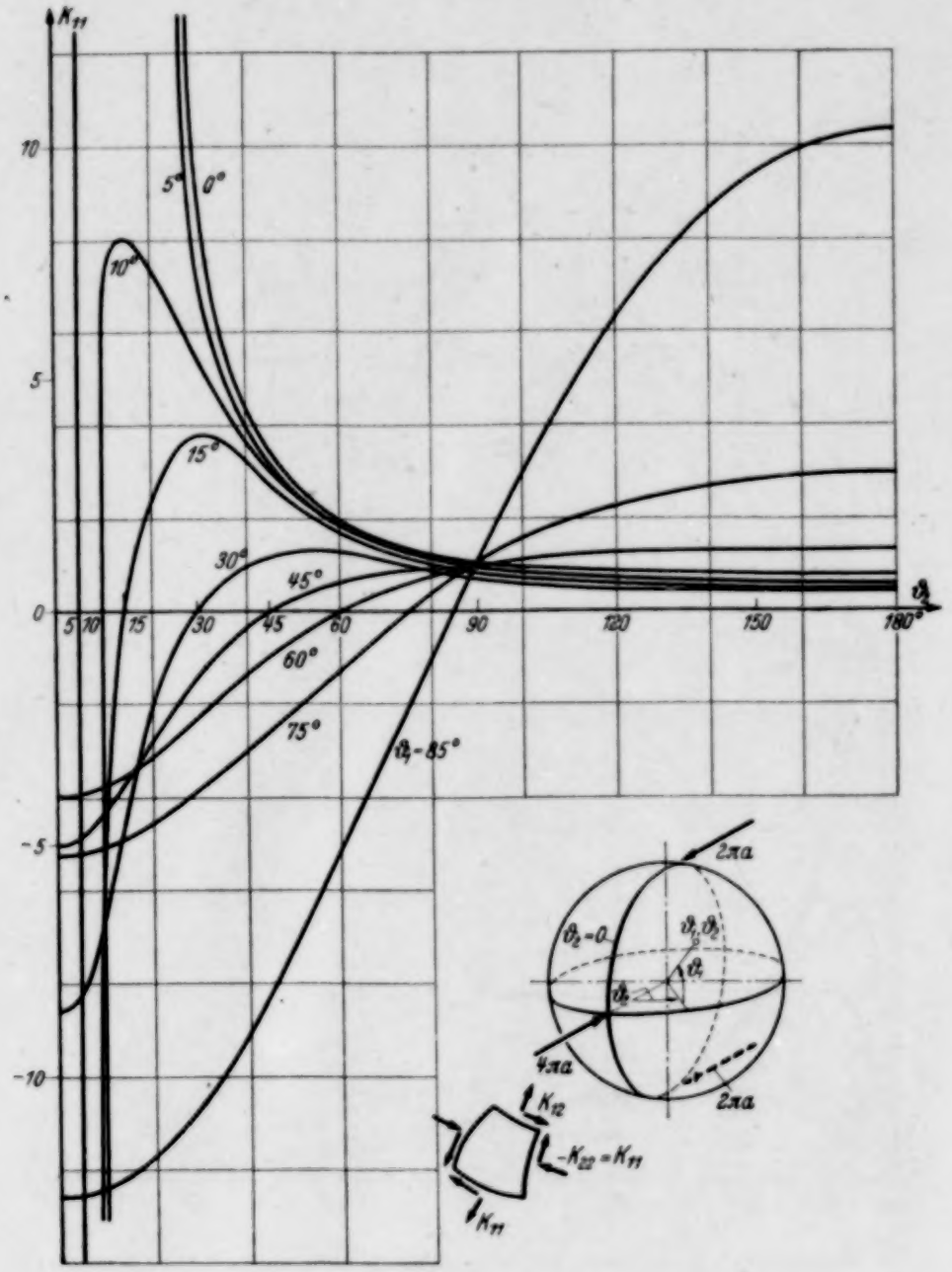

Abb. 10a. Schnittkräfte für Lastfall 3 b)3) Meridiankraft K_{11}.

Damit rechnen wir (49) weiter aus:

$$(K_{11})_0 = \frac{1}{\cos^2 \tau_1} \frac{2\,\lambda_2}{(\lambda_2^2 + (\lambda_1/\cos\tau_1)^2)} = \frac{2\,a^2\,\lambda_2 \cos\tau_1}{\cos\tau_1 (\lambda_2^2\,a^2 \cos^2\tau_1 + \lambda_1^2\,a^2)} ,$$

$$(K_{12})_0 = -\frac{1}{\cos^2 \tau_1} \frac{2\,(\lambda_1/\cos\tau_1)}{(\lambda_2^2 + (\lambda_1/\cos\tau_1)^2)} = -\frac{2\,a\,\lambda_1\,a}{\cos\tau_1 (\lambda_2^2\,a^2 \cos^2\tau_1 + \lambda_1^2\,a^2)}$$

oder mit Polarkoordinaten

$$a\,\lambda_1 = \varrho \sin\varphi, \qquad a\,\lambda_2 \cos\tau_1 = \varrho \cos\varphi$$

$$(K_{11})_0 = \frac{2\,a}{\cos\tau_1} \frac{\cos\varphi}{\varrho} , \qquad (K_{12})_0 = -\frac{2\,a}{\cos\tau_1} \frac{\sin\varphi}{\varrho} . \tag{52}$$

Der Vergleich mit (27) ergibt, daß sie sich zu einer Resultierenden X in Richtung der Breitenkreistangente zusammenfassen lassen:

$$X = -\frac{4\,a\,\pi}{\cos\tau_1}\,.$$

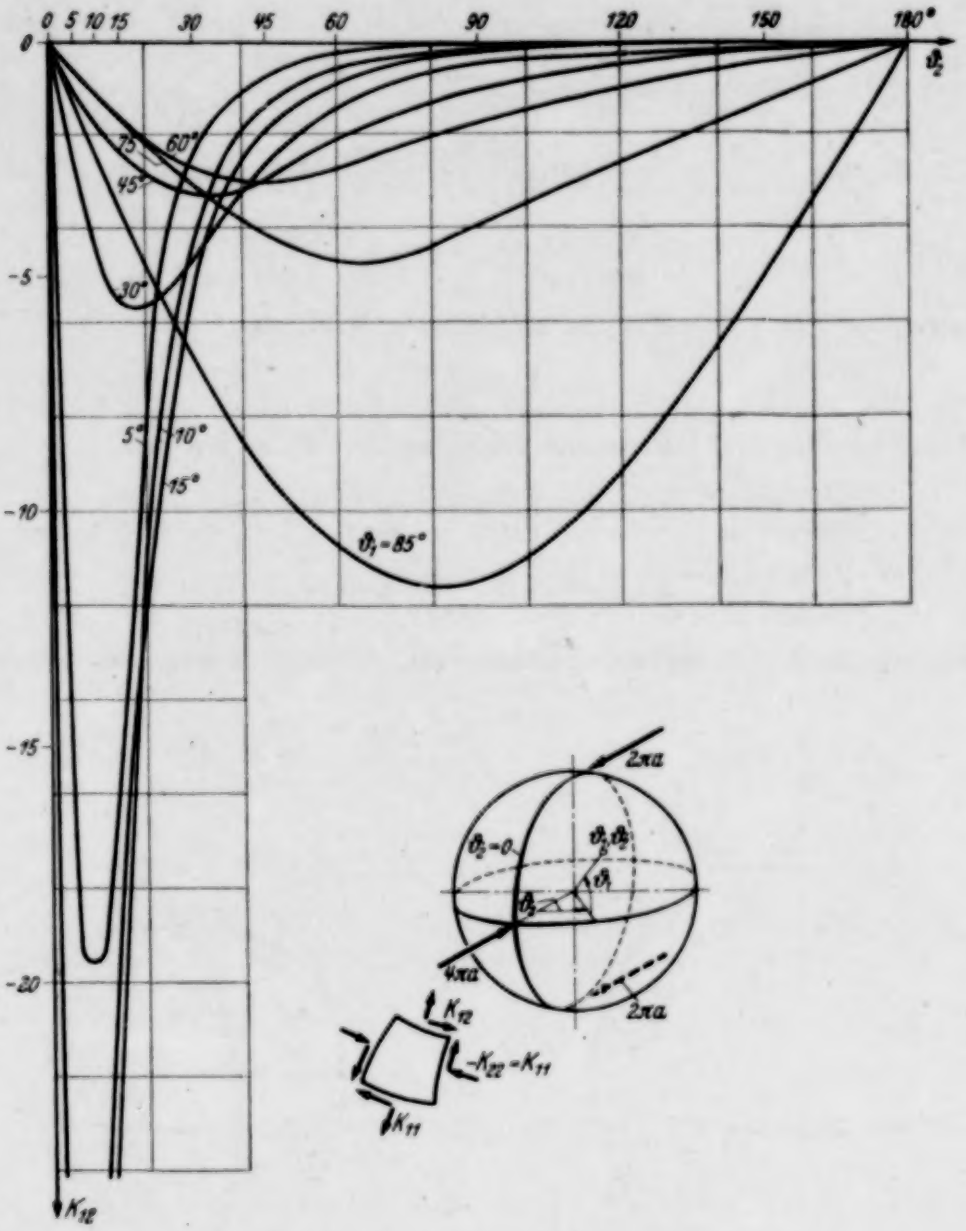

Abb. 10b. Schnittkräfte für Lastfall 3 b) 3) Schubkraft K_{12}.

Die angreifende äußere Kraft wirkt in Richtung wachsender ϑ_2. Für die Schnittkräfte an den Polen finden wir

$$\left.\begin{matrix}\text{Nordpol}\\ \text{Südpol}\end{matrix}\right\}: \quad K_{11} \approx \frac{1}{\psi_1}\,\frac{1}{\cos\tau_1}\,(1 \pm \sin\tau_1)\sin(\vartheta_2 - \tau_2)\,,$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Nordpol}\\ \text{Südpol}\end{matrix}\right\}: \quad K_{12} \approx \mp\left[\frac{1}{{\psi_1}^2} + \frac{1}{\psi_1}\,\frac{(1 \pm \sin\tau_1)}{\cos\tau_1}\cos(\vartheta_2 - \tau_2)\right].$$

Die Stützreaktionen selbst werden dann Momente am Nord- und Südpol von der Größe $2\,\pi a$ und Stützkräfte von der Größe

$$\left.\begin{matrix}\text{am Nordpol}\\ \text{am Südpol}\end{matrix}\right\}: \quad 2\,\pi a\,\frac{1 \pm \sin\tau_1}{\cos\tau_1}\,.$$

in entgegengesetzter Richtung zur angreifenden Kraft (Abb. 11).

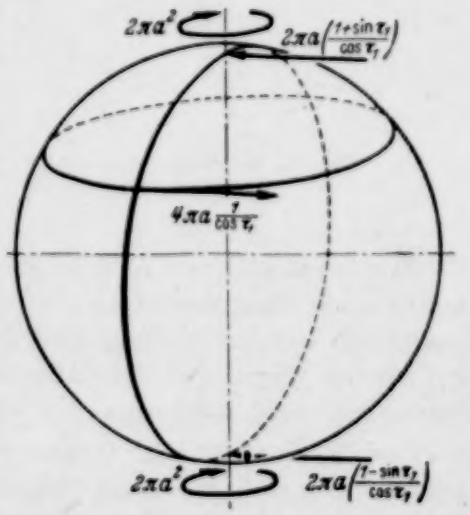

Abb. 11. Belastung 3 c) 1) mit Stützkräften und -momenten an den Polen.

2) Einzellast in Richtung der Meridiantangente. Mit

$$M = i \operatorname{ctg}\left(\frac{z-\zeta}{2}\right) \tag{53}$$

erhalten wir

$$N_1 = -\frac{\mathfrak{Sin}(y-\eta)}{\cos(x-\xi)-\mathfrak{Cof}(y-\eta)}\,, \qquad N_2 = -\frac{\sin(x-\xi)}{\cos(x-\xi)-\mathfrak{Cof}(y-\eta)}\,, \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &= -\frac{1}{\cos^2\vartheta_1}\,\frac{\sin\vartheta_1-\sin\tau_1}{\cos(\vartheta_2-\tau_2)\cos\vartheta_1\cos\tau_1-(1-\sin\vartheta_1\sin\tau_1)}\,,\\ K_{12} &= -\frac{1}{\cos^2\vartheta_1}\,\frac{\sin(\vartheta_2-\tau_2)\cos\vartheta_1\cos\tau_1}{\cos(\vartheta_2-\tau_2)\cos\vartheta_1\cos\tau_1-(1-\sin\vartheta_1\sin\tau_1)}\,, \end{aligned}\right| \tag{55}$$

$$(K_{11})_0 = \frac{2a\sin\varphi}{\cos\tau_1\,\varrho}\,, \qquad (K_{12})_0 = \frac{2a\cos\varphi}{\cos\tau_1\,\varrho}\,. \tag{56}$$

Aus dem Vergleich mit (35) folgt für die angreifende Kraft die Größe

$$Y = \frac{4\pi a}{\cos\tau_1}$$

in Richtung abnehmender ϑ_1. Die Schnittkräfte an den Polen werden

$$\left.\begin{matrix}\text{Nordpol}\\ \text{Südpol}\end{matrix}\right\}: \quad K_{11} \approx \pm\left[\frac{1}{\psi_1^{\,2}} + \frac{1\pm\sin\tau_1}{\cos\tau_1}\cos(\vartheta_2-\tau_2)\right].$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Nordpol}\\ \text{Südpol}\end{matrix}\right\}: \quad K_{12} \approx \frac{1}{\psi_1}\,\frac{1\pm\sin\tau_1}{\cos\tau_1}\sin(\vartheta_2-\tau_2)\,.$$

Die sich daraus ergebenden Stützkräfte können aus Abb. 12 entnommen werden.

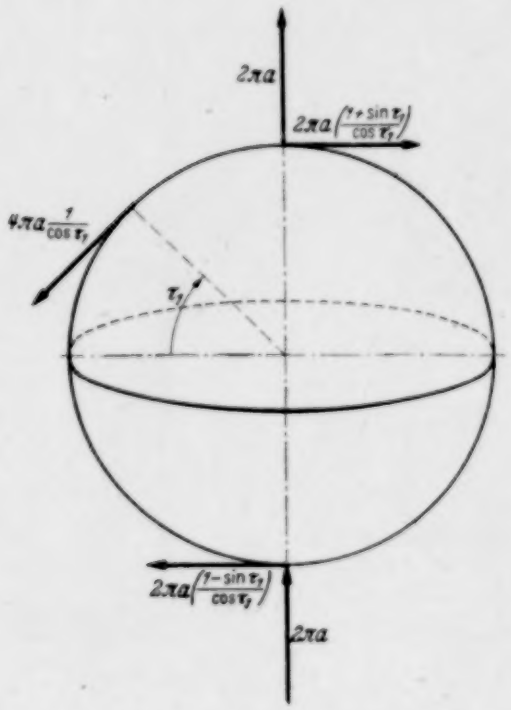

Abb. 12. Belastung 3 c) 2) mit den Stützkräften an den Polen.

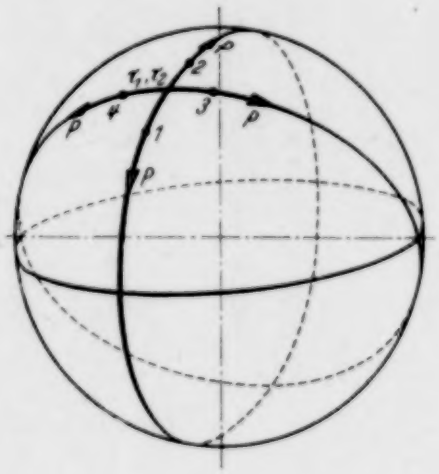

Abb. 13. Aufbau einer Normallast aus vier tangentialen Einzelkräften.

3) Normallast in einem beliebigen Schalenpunkt. Aus den Lastfällen c) 1) und 2) können wir Singularitäten, bei denen die Schnittkräfte für einen Punkt (τ_1, τ_2) stärker als $1/\psi_1$ unendlich werden, aufbauen. Wir wollen das für den Fall der Normallast im Punkt (τ_1, τ_2) zeigen auf einem Wege, auf dem alle Singularitäten, die die *Reißner*sche Lösung für die Pole enthält, behandelt werden können.

Zur Normallast im Punkt (τ_1, τ_2) gehört eine drehsymmetrische Verteilung von Schnittkräften, die sich in seiner Umgebung wie $1/\varrho^2$ verhalten [vgl. Lastfall b) 3)]. Diese Singularität bauen wir aus vier Einzelkräften auf, die in den Punkten 1 bis 4 angreifen sollen (Abb. 13). Punkt 1 und 2 liegen auf dem Meridian durch (τ_1, τ_2) mit gleichem Winkelabstand ω von (τ_1, τ_2)

entfernt. Dabei wollen wir $\tau_2 = 0$ setzen. Wir können uns später von dieser Einschränkung frei machen, indem wir in den Endformeln für ϑ_2 überall $\vartheta_2 - \tau_2$ setzen. Die Kraft P habe die Richtung der jeweiligen Meridiantangente, und zwar soll P in 1 im Sinne abnehmender ϑ_1 und P in 2 im Sinne wachsender ϑ_1 wirken. Die Punkte 3 und 4 liegen gleichfalls symmetrisch zum Punkt (τ_1, τ_2) auf demjenigen größten Kreis durch (τ_1, τ_2), der den Meridian dort senkrecht schneidet. Ihr Winkelabstand in der Ebene dieses Kreises gemessen soll gleichfalls $2\,\omega$ sein. Die Kräfte P in 3 und 4 sollen die Richtung der jeweiligen Tangente an diesen Kreis haben und im Punkt 3 im Sinne zunehmender, im Punkt 4 im Sinne abnehmender ϑ_2 wirken. Die Resultierende der Kräfte ist eine Normallast im Punkt (τ_1, τ_2).

Für die Koordinaten ϑ_1, ϑ_2 der 4 Punkte findet man

Punkt 1: $\vartheta_1 = \tau_1 - \omega, \quad \vartheta_2 = \tau_2 = 0;$

Punkt 2: $\vartheta_1 = \tau_1 + \omega, \quad \vartheta_2 = \tau_2 = 0;$

Punkt 3: $\varphi_2 = +\omega, \quad \sin\vartheta_1 = \cos\omega \sin\tau_1, \quad \sin\vartheta_2 = \dfrac{\sin\omega}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}},$

$$\cos\vartheta_1 = \sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}, \quad \cos\vartheta_2 = \frac{\cos\omega\cos\tau_1}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}};$$

Punkt 4: $\varphi_2 = -\omega, \quad \sin\vartheta_1 = \cos\omega \sin\tau_1, \quad \sin\vartheta_2 = -\dfrac{\sin\omega}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}},$

$$\cos\vartheta_1 = \sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}, \quad \cos\vartheta_2 = \frac{\cos\omega\cos\tau_1}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}.$$

Wir wollen mit $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in Tangentenrichtung des oben eingeführten größten Kreises im Sinne wachsender ϑ_2 bezeichnen. Dann erhalten wir für die Richtungs-cos $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_2$ im

Punkt 3: $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1 = -\dfrac{\sin\omega\sin\tau_1}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}, \quad \mathfrak{t}\mathfrak{t}_2 = \dfrac{\cos\tau_1}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}},$

Punkt 4: $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1 = \dfrac{\sin\omega\sin\tau_1}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}, \quad \mathfrak{t}\mathfrak{t}_2 = \dfrac{\cos\tau_1}{\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}.$

Nun benutzen wir die Ergebnisse aus c) 1) und 2), um die Funktion $M(z)$ für die vier Kräfte P aufzustellen. Die Kraft P im Punkt 1 liefert den Betrag

$$\frac{P\cos(\tau_1-\omega)}{4\pi a}\, i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_1}{2}\right).$$

Die Kraft P im Punkt 2 liefert den Betrag

$$-\frac{P\cos(\tau_1+\omega)}{4\pi a}\, i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_2}{2}\right).$$

Die Kraft P im Punkt 3 zerlegen wir in Richtung der Meridian- und Breitenkreistangente. Ihr Anteil wird

$$\frac{P(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_2)\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}{4\pi a}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_3}{2}\right) - \frac{P(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}{4\pi a}\, i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_3}{2}\right)$$

und der Anteil der Kraft P im Punkt 4 entsprechend

$$-\frac{P(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_2)\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}{4\pi a}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_4}{2}\right) + \frac{P(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)\sqrt{1-\cos^2\omega\sin^2\tau_1}}{4\pi a}\, i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_4}{2}\right).$$

Mit den oben berechneten Richtungs-cos erhalten wir

$$M(z) = \frac{P}{4\pi a}\left\{ i\left[\cos(\tau_1-\omega)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_1}{2}\right) - \cos(\tau_1+\omega)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_2}{2}\right)\right] + \cos\tau_1\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_3}{2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_4}{2}\right)\right] + \sin\omega\sin\tau_1\left[i\left\{\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_4}{2}\right) + \mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta_3}{2}\right)\right\}\right]\right\}.$$

Wir entwickeln nun alle vorkommenden Funktionen in der Umgebung von (τ_1, τ_2) nach ω und behalten nur die linearen Glieder bei. Dann erhalten wir

$$M(z) = \frac{P\omega}{4\pi a}\, 4\left[\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)} + \sin\tau_1\, i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{z-\zeta}{2}\right)\right].$$

Die Untersuchung der zugehörigen Schnittkräfte an der Stelle (τ_1, τ_2) und den Polen ergibt, daß zu dieser Funktion (ohne Faktor vor der Klammer) das in Abb. 14 dargestellte Kräftebild gehört. Und zwar gibt der erste Summand eine Kraft in der Breitenkreisebene von der Größe $4\pi a/\cos\tau_1$, und der zweite nach *c*) 2) eine Kraft in Richtung der Meridiantangente von der Größe $4\pi a \operatorname{tg}\vartheta_1$, so daß insgesamt wirklich eine Normallast erzielt wird.

4. Die Verschiebungen der Kugelschale unter Einzellasten. Die Berechnung der Verschiebungen zu den unter **3.** behandelten Lastfällen soll an zwei Beispielen gezeigt werden. Beim ersten soll die Schale an zwei Breitenkreisen $\vartheta_1 = \mp\vartheta_{1R}$ unverschieblich gelagert sein, soweit man das in der Membrantheorie verlangen kann. Es kann nur $u_{1R}=0$ und $u_{2R}=0$ für $\vartheta_1 = \pm\vartheta_{1R}$ gefordert werden, während die zusätzliche Forderung $u_3=0$ nur mit Biegespannungen erfüllt werden kann. Die Schale soll eine Last $4\pi a$ in Richtung der Äquatortangente tragen. Als zweites Beispiel sollen die Verschiebungen der geschlossenen Schale unter der Belastung **3** b) 4) berechnet werden.

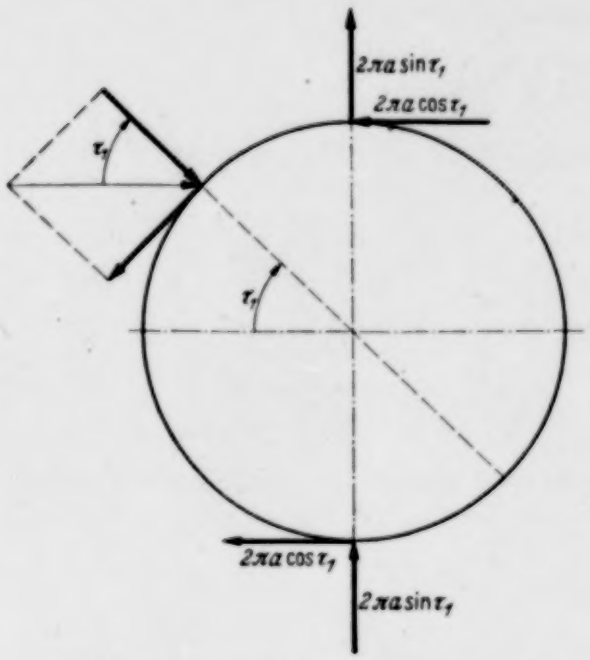

Abb. 14. Belastung 3 c) 3) mit den Stützkräften an den Polen.

Erstes Beispiel. Eine Teillösung finden wir, wenn wir die Verschiebungsgröße $v_1 = u_1/\cos\vartheta_1$ aus (19) berechnen und dabei N_1 aus (22) einsetzen. Wir haben also die *Poisson*sche Gleichung

$$\Delta v_1 = -\frac{2a(1+\nu)}{Eh}\,\frac{\sin x\,\mathfrak{Sin}\,2y}{(\cos x - \mathfrak{Cof}\,y)} = -k\,g(x,y) \qquad (57)$$

zu lösen. Dabei muß v_1 den folgenden Randbedingungen genügen: v_1 muß für $\vartheta_1 = \vartheta_{1R}$ verschwinden, da dort die Schale unverschieblich gelagert sein soll. Ferner ist Symmetriebedingung, daß v_1 am Äquator $(y=0)$ verschwindet. Aber auch an den Meridianen $x=0$ und $x=\pm\pi$ ist $v_1=0$, da die Belastung zur Ebene durch diese Meridiane antisymmetrisch ist und folglich die in bezug auf diese Ebene symmetrische Größe v_1 verschwindet. Die rechte Seite von (57) ist eine in x periodische Funktion mit der Periode 2π. Wir können sie also in eine *Fourrier*reihe

$$g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y)\sin m x \qquad (58)$$

entwickeln. Für ihre Koeffizienten $g_m(y)$ erhält man

$$g_m(y) = \frac{2}{\pi}\,\mathfrak{Sin}\,2y \int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin m x}{\cos x - \mathfrak{Cof}\,y}\,dx = -e^{-(m-2)y} + e^{-(m+2)y}. \qquad (59)$$

Die Lösung v_1 kann dann gleichfalls als *Fourier*reihe geschrieben werden:

$$v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} v_{1m}(y)\sin m x. \qquad (60)$$

Für ihre Koeffizienten $v_{1m}(y)$ erhält man aus (57) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v_{1m}}{dy^2} - m^2 v_{1m} = k\,e^{-(m-2)y} - k\,e^{-(m+2)y}. \qquad (61)$$

Ihre Lösung

$$v_{1m} = C_{1m}\,e^{my} + C_{2m}\,e^{-my} - \frac{k}{4(m-1)}\,e^{-(m-2)y} - \frac{k}{4(m+1)}\,e^{-(m+2)y} \qquad (m>1) \qquad (62\,a)$$

$$v_{11} = C_{11}\,e^{y} + C_{21}\,e^{-y} + \frac{k}{2}\,y\,e^{y} - \frac{k}{8}\,e^{-3y} \qquad (m=1) \qquad (62\,b)$$

besteht, wie immer, aus zwei Teilen: Die Funktionen mit den Integrationskonstanten als Faktoren bedeuten als Lösungen der homogenen Gleichung eine dehnungslose Verschiebung der Schale. Die darauf folgenden Partikularlösungen der inhomogenen Gleichung sind Verschie-

bungen infolge von Dehnungen der Schale. Bei der oben gestellten Aufgabe folgen die $2m$ Integrationskonstanten C_{1m}, C_{2m} aus den $2m$ Bedingungen, daß für jedes m die Verschiebung v_{1m} für $y=0$ und $y=y_R$ verschwinden soll. Das braucht hier nicht vorgerechnet zu werden. Für die nun folgende Ermittlung von v_2 aus (20) kann v_1 jedenfalls als bekannt angesehen werden.

Das Integral (20) ist ein Linienintegral

$$v_2 = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \Big(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \Big) \tag{63}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= -\frac{\sin x}{\cos x - \mathfrak{Cof}\, y}\,\mathfrak{Cof}^2 y\,\frac{2a(1+\nu)}{Eh} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{dv_{1m}}{dy}\sin mx\,, \\ Q(x,y) &= -\frac{\mathfrak{Sin}\, y}{\cos x - \mathfrak{Cof}\, y}\,\mathfrak{Cof}^2 y\,\frac{2a(1+\nu)}{Eh} + \sum_{m=1}^{\infty} m\, v_{1m}(y)\cos mx \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Die Integration ergibt

$$\left.\begin{aligned} v_2 = \int_{\xi=x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{\eta=y_0}^{y} Q(x,\eta)\,d\eta &= \frac{2a(1+\nu)}{Eh}\,\mathfrak{Cof}^2 y_0 \ln\frac{\mathfrak{Cof}\, y_0 - \cos x}{\mathfrak{Cof}\, y_0 - \cos x_0} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{dv_1}{dy}\right)_{y=y_0}\frac{1}{m}(\cos mx - \cos mx_0) + \frac{2a(1+\nu)}{Eh}\Big[\frac{1}{2}(\mathfrak{Cof}^2 y - \mathfrak{Cof}^2 y_0) + \\ + \cos x\,(\mathfrak{Cof}\, y - \mathfrak{Cof}\, y_0) + \cos^2 x \ln\left(\frac{\mathfrak{Cof}\, y - \cos x}{\mathfrak{Cof}\, y_0 - \cos x}\right)\Big] + \sum_{m=1}^{\infty} m\cos mx \int_{y_0}^{y} v_{1m}(\eta)\,d\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Die noch auszuführende Differentiation und Integration von v_{1m} sind elementare Operationen, auf deren Durchführung wir hier verzichten.

Wählt man als Anfangspunkt der Integration etwa den Punkt $(0, \pi)$, so erhält man, schon auf die Koordinaten ϑ_1, ϑ_2 umgeformt,

$$\left.\begin{aligned} u_2(\vartheta_1,\vartheta_2) = u_2(0,\pi)\cos\vartheta_1 - \frac{2a(1+\nu)}{Eh}\cos\vartheta_1\Big[\ln\left(\frac{1-\cos\vartheta_2}{2}\right) + \frac{1}{2}\,tg^2\vartheta_1 + \\ + \cos\vartheta_2\left(\frac{1}{\cos\vartheta_1} - 1\right) + \cos^2\vartheta_2 \ln\left(\frac{\frac{1}{\cos\vartheta_1} - \cos\vartheta_2}{1-\cos\vartheta_2}\right)\Big] - \\ - \cos\vartheta_1 \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{dv_1}{dy}\right)_0\frac{1}{m}(\cos m\vartheta_2 - \cos m\pi) - \cos\vartheta_1 \sum_{m=1}^{\infty} m\cos m\vartheta_2 \int_0^{\nu} v_{1m}(\eta)\,d\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Die Lösung ist im Bereich $-\vartheta \leqq \vartheta_1 \leqq \vartheta_{1R}$ überall regulär mit Ausnahme des Punktes ($\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=0$), wo u_2 logarithmisch unendlich wird.

Damit ist ein partikulares Integral gefunden, das die Randbedingung $u_2=0$ für $\vartheta_1=\pm\vartheta_{1R}$ noch nicht erfüllt. Wir müssen also eine überall reguläre Lösung $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ überlagern mit den Randwerten $\bar{u}_{1R}=0$ und $\bar{u}_{2R}=-u_{2R}(\vartheta_2)$. Dies ist die *Reißner*sche Lösung **3** a). Die Bestimmung der darin auftretenden Integrationskonstanten braucht nicht mehr vorgeführt zu werden.

Zweites Beispiel. Anstatt wie im ersten Beispiel Bedingungen auf dem Rand $y=\pm y_R$ zu erfüllen, muß man solche im Unendlichen befriedigen, wenn man die Verschiebungen der geschlossenen Kugelschale sucht. Als Beispiel dazu berechnen wir die Verschiebungen der geschlossenen Schale für den Lastfall I der Belastung **3** b) 4). Wir stellen zunächst die Differentialgleichung (19) für v_2 auf. Mit N_2 aus (41) heißt sie

$$\Delta v_2 = -\frac{2a(1+\nu)}{Eh}\,\mathfrak{Sin}\, 2y\,\frac{\sin 2x}{\mathfrak{Cof}\, 2y - \cos 2x} = -k\,g(x,y)\,. \tag{67}$$

Die Randbedingungen für v_2 sind: $v_2=0$ für die Geraden $x=0$ und $x=\pi/2$ aus Symmetriegründen und ebenso $v_2=0$ für $y=0$. Für den Rand $y=\infty$ haben wir endlich bleibende Verschiebung v_2 zu fordern, da u_2 in der Umgebung des Poles verschwinden muß; denn für die Belastung Z ist am Pol nur ein drehsymmetrischer Zustand möglich, der frei von einer Drehung um die Nord-Süd-Achse ist. Nun wird $g(x, y)$ für große Werte von y unabhängig von y, und man erhält

$$\lim_{y\to\infty} v_2 = \frac{1}{4}\,\frac{2a(1+\nu)}{Eh}\sin 2x\,;$$

v_2 bleibt also endlich im Unendlichen. Der Rechnungsgang ist zunächst der gleiche wie im vorigen Beispiel: Die Funktion $g(x, y)$ hat in x die Periode π. Die *Fourier*reihe heißt also

$$g(x,y) = \sum_1^\infty g_m(y) \sin 2mx \,. \tag{68}$$

Ihre Koeffizienten werden

$$g_m(y) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2y \sin 2x}{\mathfrak{Cof}\, 2y - \cos 2x} \sin 2mx \, dx = e^{-2(m-1)y} - e^{-2(m+1)y} \,. \tag{69}$$

Mit dem Ansatz

$$v_2 = \sum_{m=1}^\infty v_{.m}(y) \sin 2mx \tag{70}$$

erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung für v_{2m}

$$\frac{d^2 v_{2m}}{dy^2} - 4m^2 v_{2m} = -k e^{-2(m-1)y} + k e^{-2(m+1)y} \,. \tag{71}$$

Ihre Lösung heißt

$$v_{2m} = C_1 e^{+my} + C_2 e^{-my} + \frac{k}{8m-4} e^{-2(m-1)y} + \frac{k}{8m+4} e^{-2(m+1)y} \,. \tag{72}$$

Die Integrationskonstante C_1 muß verschwinden, da sonst v_2 für $y \longrightarrow \infty$ nicht endlich bleiben kann. Die Konstante C_2 folgt aus der Bedingung, daß v_2 für $y=0$ verschwindet; wir verzichten wieder auf die wirkliche Ausrechnung und sehen v_2 im folgenden als bekannt an. Dann erhält man v_1 aus (20)

$$v_1 = \frac{2a(1+\nu)}{Eh} \left\{ \frac{\mathfrak{Cof}^2 y_0}{2} \ln \frac{\mathfrak{Cof}\, 2y_0 - \cos 2x}{\mathfrak{Cof}\, 2y_0 - \cos 2x_0} + \frac{1}{4} \left[\mathfrak{Cof}\, 2y - \mathfrak{Cof}\, 2y_0 + (1 + \cos 2x) \ln \frac{\mathfrak{Cof}\, 2y - \cos 2x}{\mathfrak{Cof}\, 2y_0 - \cos 2x} \right] - \right.$$
$$\left. - \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{2m} (\cos 2mx - \cos 2mx_0) \left(\frac{dv_{2m}}{dy} \right)_{y=y_0} - \sum_{m=1}^\infty 2m \cos 2mx \int_{y_0}^y v_{2m}(\eta)\, d\eta \right\} .$$

Für $y \longrightarrow \infty$ wird

$$\lim_{y \to \infty} v_1 \longrightarrow \frac{2a(1+\nu)}{Eh} \frac{1}{8} e^{2y}$$

oder in Koordinaten ψ_1, ϑ_2

$$\lim_{\psi_1 \to 0} u_1 \longrightarrow \frac{2a(1+\nu)}{Eh} \frac{1}{2} \frac{1}{\psi_1} \,.$$

Es ergibt sich richtig ein drehsymmetrischer Zustand. Die gleiche Singularität besitzt die *Reißner*-Lösung **3** a) für $n=0$ für eine Normallast $2\pi a$ am Pol. Überlagern wir also Lastfall II von **3** b) 4), so wird die Verschiebung am Nordpol tatsächlich regulär.

5. Anhang: Umformung der Grundgleichungen der Membrantheorie für drehsymmetrische Schalen. Für drehsymmetrische Schalen ($1/r_1$, $1/r_2$ Hauptkrümmungen, $1/r_1$ Meridiankrümmung, $1/r_2 \cos\vartheta_1$ Breitenkreiskrümmung) lauten die Gleichgewichtsbedingungen bei Fehlen von Flächenkräften [1]

$$\left.\begin{aligned} &\dot{K}_{11} r_2 \cos\vartheta_1 + K_{11} (r_2 \cos\vartheta_1)^{\cdot} - K_{22} (r_2 \cos\vartheta_1)^{\cdot} + K'_{21} r_1 = 0 \,, \\ &\dot{K}_{12} r_2 \cos\vartheta_1 + 2 K_{12} (r_2 \cos\vartheta_1)^{\cdot} + r_1 K'_{22} = 0 \,, \\ &K_{11} r_2 + K_{22} r_1 = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wir eliminieren K_{22} mit Hilfe der dritten Gleichung, multiplizieren die erste Gleichung mit $\cos\vartheta_1$, die zweite mit $r_2 \cos\vartheta_1$ und benutzen einmal die geometrische Beziehung

$$(r_2 \cos\vartheta_1)^{\cdot} = - r_1 \sin\vartheta_1 \,. \tag{2}$$

Wir erhalten so die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\dot{K}_{11} r_2 \cos^2\vartheta_1 + K_{11} \left[(r_2 \cos\vartheta_1)^{\cdot} \cos\vartheta_1 - r_2 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 \right] + K'_{21} r_1 \cos\vartheta_1 = 0, \\ &\dot{K}_{12} (r_2 \cos\vartheta_1)^2 + 2 K_{12} r_2 \cos\vartheta_1 (r_2 \cos\vartheta_1)^{\cdot} - r_2^2 K'_{11} \cos\vartheta_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &(K_{11} r_2 \cos^2\vartheta_1)^{\cdot} + (K_{21} r_2^2 \cos^2\vartheta_1)' \frac{r_1}{r_2^2 \cos\vartheta_1} = 0 \,, \\ &(K_{12} r_2^2 \cos^2\vartheta_1)^{\cdot} - (K_{11} r_2 \cos^2\vartheta_1)' \frac{r_2}{\cos\vartheta_1} = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von Seite 168.

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$K_{11}\, r_2 \cos^2\vartheta_1 = N_1\,, \qquad K_{12}\, r_2^{\,2} \cos^2\vartheta_1 = N_2\,. \tag{5}$$

Dabei hat N_1 die Dimension einer Kraft, N_2 die eines Momentes. Damit erhalten wir die den *Cauchy-Riemann*-Gleichungen ähnlichen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \dot N_1 + N_2' \frac{r_1}{r_2^{\,2}\cos\vartheta_1} &= 0\,, \\ \dot N_2 - N_1' \frac{r_2}{\cos\vartheta_1} &= 0\,. \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Die Elimination von

entweder N_1	oder N_2
liefert für N_2	N_1

eine Gleichung zweiter Ordnung

$$N_2'' + \ddot N_2 \frac{r_2\cos^2\vartheta_1}{r_1} - \dot N_2\left(\frac{r_2 \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1}{r_1} + \frac{\dot r_2\cos^2\vartheta_1}{r_1}\right) = 0$$

$$N_1'' + \ddot N_1 \frac{r_2}{r_1}\cos^2\vartheta_1 + \dot N_1\left(2\frac{\dot r_2}{r_1}\cos^2\vartheta_1 - \frac{r_2}{r_1}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 - \frac{r_2\dot r_1}{r_1^{\,2}}\cos^2\vartheta\right) = 0\,.$$

Wir bringen die erste Ableitung durch die Substitution

$$y = \int \frac{r_2}{\cos\vartheta_1}\, d\vartheta_1 \qquad\qquad y = \int \frac{r_1}{r_2^{\,2}\cos\vartheta_1}\, d\vartheta_1$$

zum Verschwinden. Setzen wir wieder $x = \vartheta_2$, so wird die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}\,\frac{r_2^{\,4}}{r_1 r_2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\,\frac{r_2^{\,4}}{r_1 r_2} = 0\,.$$

Danach scheint die mathematische Behandlung von Schalen mit

$$\frac{r_2^{\,4}}{r_1 r_2} = \pm\lambda^2 = \text{konst}^{\,*} \tag{7}$$

besonders einfach zu werden.

Zu jedem

$$N_2(\vartheta_1, \vartheta_2) \qquad\qquad N_1(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

findet man die konjugierte Schnittkraft

$$N_1(\vartheta_1, \vartheta_2) \qquad\qquad N_2(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

durch Quadratur.

In der gleichen Weise kann man die Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen [1]

$$\left.\begin{aligned} \dot u_1 - u_3 &= r_1\varepsilon_1\,, \\ u_2' - u_1\sin\vartheta_1 - u_3\cos\vartheta_1 &= r_2\cos\vartheta_1\,\varepsilon_2\,, \\ \dot u_2 + u_2\frac{r_1}{r_2}\operatorname{tg}\vartheta_1 + u_1'\frac{r_1}{r_2\cos\vartheta_1} &= r_1\gamma_{12} \end{aligned}\right| \tag{8}$$

behandeln. Wir wollen das nur für die dehnungslosen Formänderungen durchführen und setzen die rechten Seiten von (8) Null. Wir eliminieren u_3 mit Hilfe der zweiten Gleichung und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{u_1}{\cos\vartheta_1}\right)^{\cdot} - \frac{r_2}{\cos\vartheta_1}\left(\frac{u_2}{r_2\cos\vartheta_1}\right)' &= 0\,, \\ \left(\frac{u_2}{r_2\cos\vartheta_1}\right)^{\cdot} + \left(\frac{u_1}{\cos\vartheta_1}\right)'\frac{r_1}{r_2^{\,2}\cos\vartheta_1} &= 0\,. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

---

* Über den Unterschied im mechanischen Verhalten und im Integrationsverfahren bei positiver und negativer *Gauß*scher Krümmung $1/r_1 r_2$ vgl. *W. Flügge*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947) S. 65.

[1] Vgl. Fußnote 2 von Seite 168.

Setzen wir

$$\frac{u_1}{\cos\vartheta_1} = v_2\,, \qquad \frac{u_2}{r_2\cos\vartheta_1} = v_1\,, \tag{10}$$

so entsteht das Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_1 + \frac{r_1}{r_2^{\,2}\cos\vartheta_1}\, v_2' = 0\,, \\ \dot{v}_2 - \frac{r_2}{\cos\vartheta_1}\, v_1' = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

das, wie behauptet[1], mit den Gleichgewichtsbedingungen mathematisch identisch ist; v_1 hat die Dimension einer Drehung und ist der Kraft N_1 zugeordnet, v_2 die einer Verschiebung und entspricht dem Moment N_2. Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit der *Plücker*schen Analogie über die Zuordnung von Momenten und Verschiebungen oder Kräften und Drehungen[2].

6. Zusammenfassung. Die Gleichungen der Membrankugelschale können besonders einfach geschrieben werden, wenn man die Kugelfläche mittels der Merkatorprojektion auf die Ebene abbildet. Führt man statt der Schnittkräfte und Verschiebungen geeignete neue Unbekannte ein, so erscheinen die Gleichgewichtsbedingungen als die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen, die Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen sozusagen als inhomogene *Cauchy-Riemann*sche Gleichungen. Damit können besonders leicht die Spannungszustände der geschlossenen Kugelschale unter Einzellasten angegeben werden. Diese Lösungen entsprechen denen für Einzelkräfte im unendlich ausgedehnten Körper der allgemeinen Elastizitätstheorie. Ihre Bedeutung liegt vor allem darin, daß man mit ihrer Hilfe bisher noch nicht behandelte Randwertaufgaben der Membrankugelschale in Angriff nehmen kann.

(Eingegangen am 13. Mai 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Friedrich Martin*, Paris 17e, 23 rue des moines.

[1] Vgl. Seite 170.

[2] Vgl. Fußnote 2 von Seite 171.

Die energetische Berechnung des induzierten Widerstandes.

Von **W. Kaufmann.**

1. Einführung. Bei der Bewegung einer Auf- oder Quertrieb erzeugenden materiellen Fläche von endlicher Spannweite und kleinem Anstellwinkel in einer unendlich ausgedehnten, homogenen Flüssigkeit bildet sich bekanntlich[1], von der Hinterkante ausgehend, eine Unstetigkeitsfläche aus, die sich über das ganze von der materiellen Fläche durchstrichene Gebiet erstreckt. Denkt man sich diese Unstetigkeitsfläche durch einzelne nach rückwärts bis ins Unendliche verlaufende Wirbelfäden ersetzt, so lassen sich die diesen „freien Wirbelfäden" entsprechenden Störungsgeschwindigkeiten an jeder Stelle berechnen. Die materielle Fläche soll unter der Annahme hinreichend großer Streckung als „tragender Wirbel" aufgefaßt werden. Die durch diesen erzeugten Störungsgeschwindigkeiten nehmen nach dem *Biot-Savart*schen Gesetz mit dem Abstand von der Fläche ab und verschwinden in großer Entfernung hinter ihr. Dort sind also nur noch die Störungsgeschwindigkeiten infolge der freien Wirbel vorhanden. Sieht man die Eigengeschwindigkeit der freien Wirbel als klein gegenüber der Geschwindigkeit v_0 an, mit welcher die materielle Fläche in der Flüssigkeit gleichförmig horizontal bewegt wird, dann liegen in großer Entfernung hinter der Fläche alle Störungsgeschwindigkeiten in Querebenen, die zur Bewegungsrichtung senkrecht stehen, d. h. die Störungsbewegung kann als eben angesehen werden, sofern das betrachtete Flüssigkeitsgebiet hinreichend weit vom Anfang und vom Ende der Unstetigkeitsfläche entfernt ist. Für die folgenden Betrachtungen soll durchweg eine zur Flächenmitte symmetrische Auftriebsverteilung vorausgesetzt werden.

In der Zeiteinheit wächst das hier betrachtete Gebiet der Unstetigkeitsfläche um die Länge v_0, und die Zunahme an kinetischer Energie der Störungsbewegung ist gleich dem Energieinhalt aus den Störungsgeschwindigkeiten zwischen zwei im Abstand v_0 senkrecht zur Unstetigkeitsfläche gelegten Ebenen. Solange man die Flüssigkeit als „ideal" ansieht, ist zur Vorwärtsbewegung der materiellen Fläche eine Kraft erforderlich, die gleich dem „induzierten" oder „Randwiderstand" W_i der Fläche ist, da wegen des Fehlens aller Zähigkeitseinflüsse ein „Profilwiderstand" nicht auftreten kann. Diese Kraft leistet in der Zeiteinheit die Arbeit $W_i\, v_0$, welche nach dem Energiesatz gleich der Änderung der kinetischen Energie der Störungsbewegung sein muß. Bezeichnet also w die (nach Größe und Richtung veränderliche) Störungsgeschwindigkeit in einer Querebene, so wird, wenn man beiderseits durch v_0 dividiert, mit ϱ als Luftdichte

$$W_i = \frac{\varrho}{2} \int\limits_{(Q)} w^2 \, dF, \tag{1}$$

wobei das Integral über die ganze Querebene Q zu erstrecken ist[2].

Man weiß nun, daß die oben betrachtete Unstetigkeitsfläche ihre ursprüngliche Form nicht beibehält, sondern sich allmählich umbildet. Dabei rollen sich ihre seitlichen Enden von den Rändern der materiellen Fläche her nach der Mitte zu spiralartig auf, bis schließlich allein zwei isolierte Wirbel mit nach innen drehender Zirkulation übrigbleiben[1]. Die Zirkulation jedes der beiden gegenläufigen Wirbel ist gleich der Zirkulation einer Hälfte der Unstetigkeitsfläche, aus der sie entstehen, d. h. gleich der maximalen Zirkulation Γ_0 in Flächenmitte.

Wie Versuch und Theorie lehren, ist der Schwerpunktsabstand $2a$ der beiden aufgewickelten Wirbel kleiner als die Spannweite b der bewegten materiellen Fläche. Theoretisch erhält man

$$a = \frac{1}{\Gamma_0} \int\limits_{x=0}^{x=\frac{b}{2}} \Gamma_x \, dx, \tag{2}$$

wenn x die Abszisse längs der Spannweite — von der Mitte aus gerechnet — und Γ_x die Zirkulation um die materielle Fläche an der Stelle x bezeichnen[3] (Abb. 1). Der Schwerpunktsabstand

[1] *A. Betz*, Handbuch der Physik, Bd. VII, S. 241 ff. Berlin 1927.

[2] Vgl. *A. Betz*, wie vorstehend, oder *L. Prandtl*, Tragflügeltheorie, II. Mitteilung, Nachr. d. K. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, Mathem.-Physik. Kl. 1919, S. 107 bis 137. Neu abgedruckt in „Vier Abhandl. zur Hydrodynamik und Aerodynamik", S. 58 bis 67. Göttingen 1927.

[3] *W. Kaufmann*, Über die Aufwicklung einer instabilen Wirbelschicht von endlicher Breite. Sitzungsber. d. Bayer. Akademie d. Wiss., Mathem.-Naturwiss. Abt. 1946, S. 109 ff.

der beiden Einzelwirbel kann also bestimmt werden, sobald die Zirkulations- bzw. Auftriebsverteilung über die Flächenspannweite b gegeben ist. Insbesondere folgt im Falle elliptischer Γ-Verteilung wegen

$$\int_{x=0}^{x=\frac{b}{2}} \Gamma_x \, dx = \frac{1}{2} \Gamma_0 \, b \, \frac{\pi}{4}$$

aus (2) sofort

$$2a = b \, \frac{\pi}{4} \, . \tag{2a}$$

Der Mechanismus der so definierten Einzelwirbel, welche je zur Hälfte die gesamte ursprüngliche Unstetigkeitsfläche spiralartig aufgespult enthalten, ist bekannt [3]. Diese Wirbel haben endliche, nahezu kreisförmige Querschnitte vom Halbmesser

$$r_0 = a \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \, , \tag{3}$$

deren Mittelpunkte M_0 indessen nicht mit den Wirbelschwerpunkten S zusammenfallen (Abb. 1).

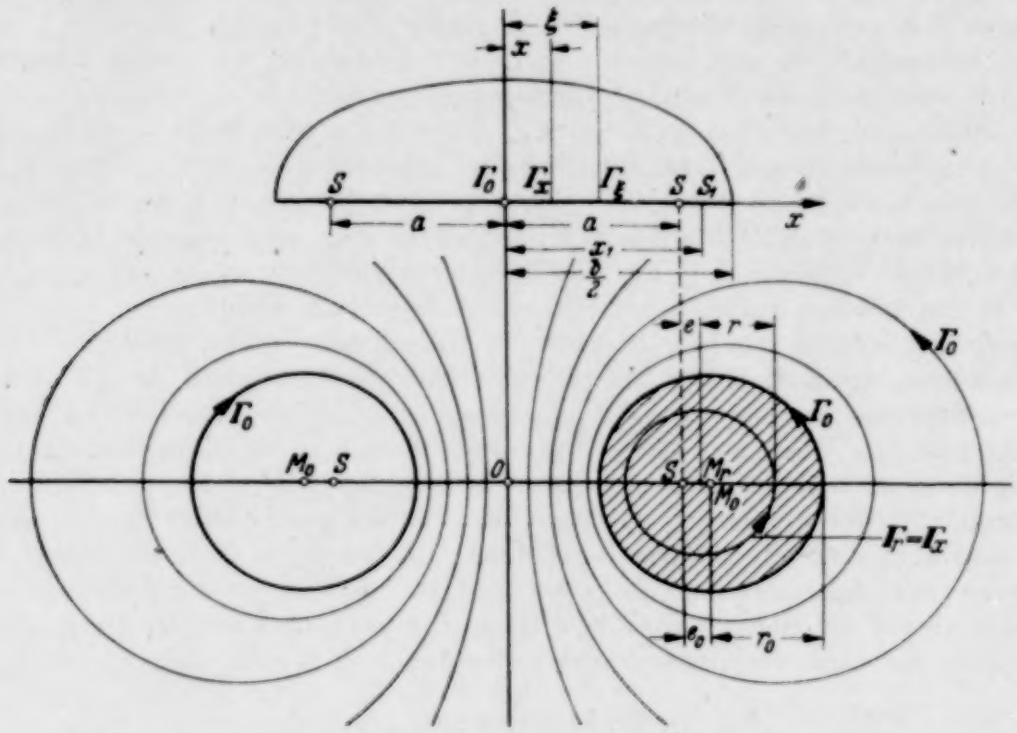

Abb. 1. Stromlinienbild des „Wirbelpaares".

Außerhalb dieser Wirbelkerne herrscht die von dem „Wirbelpaar" mit der Zirkulation Γ_0 und dem Schwerpunktsabstand $2a$ erzeugte Potentialströmung. Sie geht in Ebenen vor sich, welche einer festen, zu den Wirbelachsen lotrechten Ebene parallel sind.

An die Stelle der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche treten jetzt die beiden hier näher gekennzeichneten Einzelwirbel. Damit ist das Strömungsfeld in großer Entfernung hinter der bewegten materiellen Fläche bestimmt.

2. Der induzierte Widerstand. Um den induzierten Widerstand nach Gleichung (1) darstellen zu können, ist die Kenntnis der kinetischen Energie erforderlich, welche von dem obigen Wirbelpaar, bezogen auf die Längeneinheit der Wirbelachse, erzeugt wird.

a) Die Energie der äußeren Potentialströmung. In Abb. 2 sei M_0 wieder der Mittelpunkt des Kernrandes und M derjenige einer Stromlinie der von dem Wirbelpaar erzeugten Potentialströmung (außerhalb der Wirbelkerne), die von einer zweiten, der ersten unendlich nahe liegenden umschlossen wird. Ist ferner u die Umfangsgeschwindigkeit am Orte P dieser Stromlinie, dann wird mit den Bezeichnungen der Abb. 2 die kinetische Energie der Potentialströmung außerhalb beider Kerne, bezogen auf die Tiefe „eins"

$$E_a = \varrho \int_{r=r_0}^{r=\infty} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} u^2 \, dr_1 \sin\varphi \, ds \, , \tag{4}$$

wobei das Doppelintegral über die Halbebene zu erstrecken ist. Da die beiden benachbarten Kreise Stromlinien sind, stellt

$$u\, dr_1 \sin\varphi = d\psi$$

die sekundliche Durchflußmenge zwischen ihnen dar, welche aus Kontinuitätsgründen konstant ist. Man kann also (4) auch wie folgt schreiben:

$$E_a = \varrho \int_{r=r_0}^{r=\infty} d\psi \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} u\, ds\,. \tag{5}$$

Nun ist aber

$$\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} u\, ds = \Gamma_0$$

die Zirkulation längs des Kreises vom Halbmesser $r \geqq r_0$, welche für alle Stromlinien außerhalb der Wirbelkerne den gleichen Wert Γ_0 besitzt. Damit geht (5) über in

$$E_a = \left[\varrho\, \Gamma_0 \psi\right]_{\psi=\psi_{r_0}}^{\psi=\psi_\infty}\,. \tag{6}$$

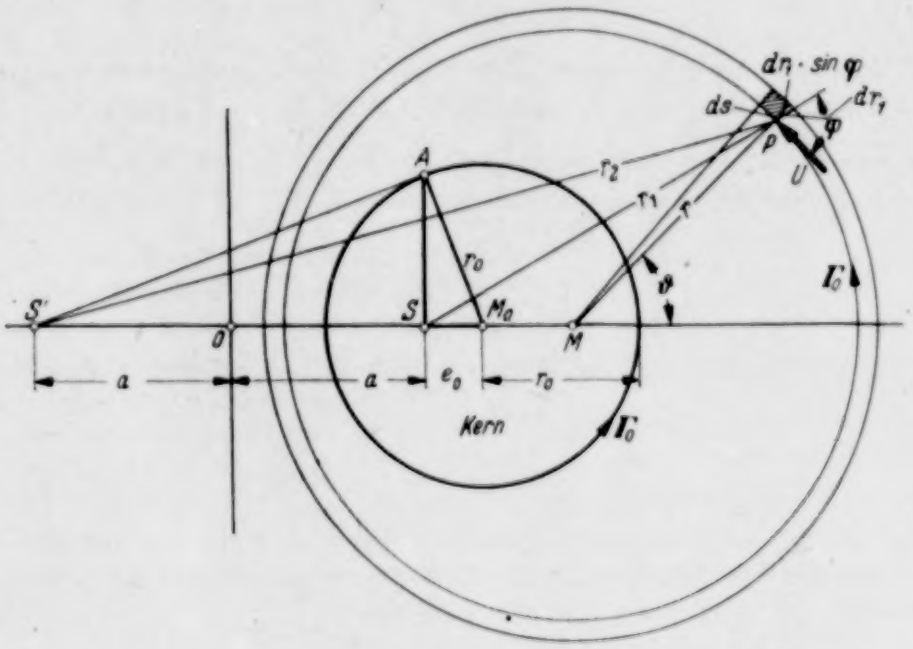

Abb. 2. Zur Berechnung der Wirbelenergie.

Die Integrationsgrenzen sind durch die Stromfunktionen ψ_{r_0} des Kernrandes und ψ_∞ für die Stromlinie mit dem Halbmesser $r \longrightarrow \infty$ bestimmt.

Die Stromfunktion der von einem Wirbelpaar erzeugten Potentialströmung ist[1]

$$\psi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}\,.$$

Danach wird

$$\psi_{r_0} = \frac{\Gamma_0}{2\pi}\left[\ln \frac{r_1}{r_2}\right]_{r=r_0}$$

und

$$\psi_\infty = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln 1 = 0\,.$$

Setzt man diese Grenzwerte in (6) ein, so erhält man

$$E_a = \frac{\varrho\, \Gamma_0^2}{2\pi}\left[\ln \frac{r_2}{r_1}\right]_{r=r_0}\,. \tag{7}$$

[1] Vgl. etwa *W. Kaufmann*, Angew. Hydromechanik, Bd. I, S. 140. Berlin 1931, wenn dort Strom- und Äquipotentiallinien miteinander vertauscht werden.

Für jede Stromlinie der von einem Wirbelpaar erzeugten Potentialströmung ist das Verhältnis $r_2/r_1 = \text{konst}$. Nun ist für den Punkt A des Kernrandes (vgl. Abb. 2)

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2_{r=r_0} = \frac{4a^2 + r_0^2 - e_0^2}{r_0^2 - e_0^2},$$

wo[1]

$$e_0 = a\left[\sqrt{1+\left(\frac{r_0}{a}\right)^2} - 1\right].$$

Setzt man e_0 ein, dann folgt nach einfacher Zwischenrechnung

$$\left[\frac{r_2}{r_1}\right]_{r=r_0} = \frac{\frac{r_0}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{r_0}{a}\right)^2} - 1},$$

und Gleichung (7) geht über in

$$E_a = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{2\pi} \ln \frac{\frac{r_0}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{r_0}{a}\right)^2} - 1}.$$

Führt man hier noch für r_0/a den Zahlenwert aus (3) ein, so erhält man schließlich als Energie der äußeren Strömung

$$E_a = 0{,}467 \frac{\varrho \Gamma_0^2}{\pi}. \tag{8}$$

Wie man sieht, ist dieser Ausdruck nicht mehr von der speziellen Auftriebsverteilung über die materielle Fläche, sondern nur von der maximalen Zirkulation Γ_0 abhängig.

b) Die Energie der Wirbelkerne. Für die beiden Wirbelkerne gilt zunächst wieder, wenn man zwei benachbarte Kernstromlinien betrachtet, die Gleichung (5), also

$$E_k = \varrho \int_{r=0}^{r=r_0} d\psi \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} u\, ds, \tag{9}$$

wobei jetzt die Integration über die Fläche eines Wirbelkernes zu erstrecken ist. Hier ist jedoch

$$\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} u\, ds = \Gamma_r \tag{10}$$

für die einzelnen Kernstromlinien nicht wie unter Ziffer a) konstant, sondern eine Funktion von r. Außerdem ist die Stromfunktion ψ im Kerninnern unbekannt. Als „mittlere" Umfangsgeschwindigkeit längs des Kreises r sei jetzt der Wert

$$\bar{u} = \frac{\Gamma_r}{2\pi r} \tag{11}$$

definiert. Außerdem soll für die sekundliche Durchflußmenge zwischen zwei unendlich nahe beieinander liegenden Stromlinien der Mittelwert

$$d\psi = \bar{u}\, dr \tag{12}$$

eingeführt werden. Dann geht (9) mit (10) bis (12) über in

$$E_k = \varrho \int_{r=0}^{r=r_0} \frac{\Gamma_r^2}{2\pi r}\, dr. \tag{13}$$

Für die weitere Rechnung sei gesetzt

$$\frac{\Gamma_r}{\Gamma_0} = \gamma, \qquad \frac{r}{r_0} = \eta. \tag{14}$$

Damit lautet (13)

$$E_k = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{2\pi} \int_{\eta=0}^{\eta=1} \frac{\gamma^2}{\eta}\, d\eta. \tag{15}$$

Zur Auswertung des vorstehenden Integrals ist zunächst die Kenntnis der Funktion $\gamma = \gamma(\eta)$ erforderlich, die wie folgt bestimmt werden kann: Das Stück der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche von x bis $b/2$ mit der Gesamtzirkulation Γ_x möge nach dem Aufspulen den Kreis vom

Halbmesser r erfüllen (Abb. 1). Außerdem bezeichne x_1 die Abszisse des Schwerpunktes S_1 der ursprünglichen Wirbelgruppe von x bis $b/2$. Dann ist[1]

$$\Gamma_r = \Gamma_x\,, \tag{16}$$

während zwischen x, x_1 und r die Beziehung besteht

$$r^2 = \frac{1}{2}\left[(x_1-x)^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+2(x_1-x)^2}\right], \tag{17}$$

wo

$$x_1 - x = \frac{1}{\Gamma_x}\int_{\xi=x}^{\xi=\frac{b}{2}} \Gamma_\xi\, d\xi\,. \tag{18}$$

Durch die Ausdrücke (16) bis (18) ist die Zirkulationsverteilung Γ_r innerhalb der Wirbelkerne – und damit wegen (14) auch die Funktion $\gamma=\gamma(\eta)$ – festgelegt, sobald die Zirkulationsverteilung Γ_x längs der bewegten materiellen Fläche bekannt ist. Eine geschlossene Darstellung des Integrals (15) ist damit allerdings nicht möglich. Man geht deshalb zweckmäßig folgendermaßen vor: Zunächst bestimmt man mit Hilfe der Ausdrücke (16) bis (18) für eine Reihe von Werten $0 \leqq r \leqq r_0$ die zugehörigen Zirkulationen Γ_r und trägt darauf die Quotienten γ^2/η als Ordinaten über η auf. Es ergibt sich dann etwa die in Abb. 3 dargestellte Kurve[2]. Das Integral (15) stellt also bis auf den konstanten Faktor den Inhalt der aus Abb. 3 ersichtlichen Fläche dar. Für $\eta=1$ ist $\gamma^2/\eta=1$, während für $\eta\longrightarrow 0$ die Funktion $\gamma^2/\eta\longrightarrow\infty$ geht. Damit entsteht für die mechanische Auswertung des Integrals eine gewisse Schwierigkeit, der man wie folgt begegnen kann: Die Zirkulation Γ_r läßt sich durch den Ausdruck

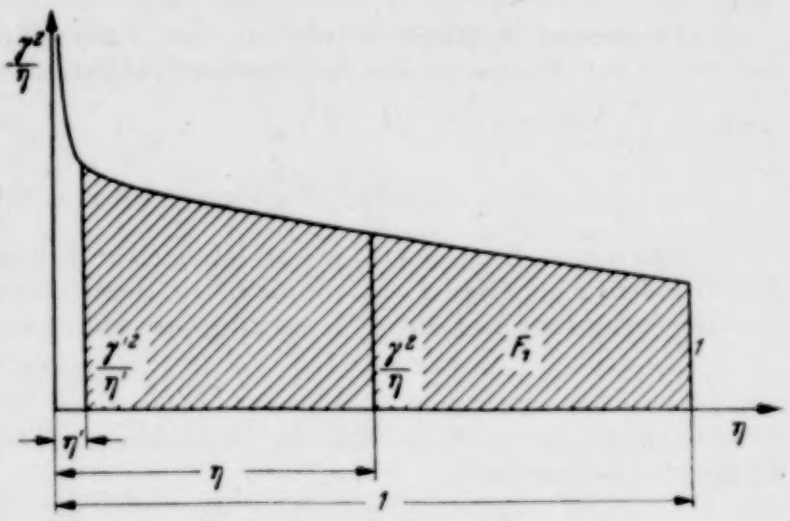

Abb. 3. Darstellung der Funktion $\frac{\gamma^2}{\eta}$.

$$\Gamma_r = \Gamma_0\left[1-\left(\frac{r_0-r}{r_0}\right)^n\right]^{1/n}$$

annähern[1], wobei n eine noch unbekannte Zahl ist. Damit wird

$$\gamma \approx \left[1-(1-\eta)^n\right]^{1/n}.$$

An der Stelle $\eta=\eta'$ sei $\gamma=\gamma'$, wobei $\eta' \ll 1$ sein soll (etwa 0,01).

Dann kann n aus der Bedingung

$$\gamma' = \left[1-(1-\eta')^n\right]^{1/n}$$

berechnet werden. Der Ausdruck (15) läßt sich also wie folgt darstellen:

$$E_k = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{2\pi}\left\{\int_{\eta=0}^{\eta=\eta'} \frac{\left[1-(1-\eta)^n\right]^{2/n}}{\eta}\,d\eta + F_1\right\}, \tag{19}$$

wenn F_1 die zwischen den Ordinaten γ'^2/η' und 1 liegende Fläche der Abb. 3 bezeichnet. Das in (19) auftretende Integral kann nun durch Reihenentwicklung bestimmt werden. Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\gamma = \left[1-(1-\eta)^n\right]^{1/n} = \left[1-1+\binom{n}{1}\eta-\binom{n}{2}\eta^2+\binom{n}{3}\eta^3-\ldots\right]^{1/n}.$$

---

[1] Vgl. Fußnote 3 von Seite 187.

[2] Die in Abb. 3 dargestellte Kurve gilt für elliptische Γ_x-Verteilung. Bei nichtelliptischer Zirkulationsverteilung erhält man einen ähnlichen Verlauf.

Da in dem in Frage kommenden Bereich $0 \leqq \eta \leqq 0{,}01$ sein soll, können alle höheren Potenzen von η vernachlässigt werden, so daß

$$\left[1-(1-\eta)^n\right]^{\frac{2}{n}} \approx n^{\frac{2}{n}}\,\eta^{\frac{2}{n}-1}$$

und

$$\int_{\eta=0}^{\eta=\eta'} \frac{\left[1-(1-\eta)^n\right]^{\frac{2}{n}}}{\eta}\,d\eta = \frac{n}{2}\,(n\eta')^{\frac{2}{n}}\,.$$

Somit wird nach (19)

$$E_k = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{2\pi}\left[\frac{n}{2}\,(n\eta')^{\frac{2}{n}} + F_1\right].$$

Schließlich erhält man als gesamte Energie der Störungsbewegung in großer Entfernung hinter der bewegten materiellen Fläche und damit als induzierten Widerstand

$$W_i = E_a + E_k = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{2\pi}\left[0{,}934 + \frac{n}{2}\,(n\eta')^{\frac{2}{n}} + F_1\right]. \tag{20}$$

3. Elliptische Auftriebsverteilung. Im Falle elliptischer Auftriebsverteilung, welche bekanntlich das Minimum des induzierten Widerstandes liefert, lautet[1] die Funktion (18) mit $\cos\varphi = \frac{2x}{b}$ und $\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2}$

$$x_1 - x = \frac{b}{2}\left[\frac{1}{2\sin\varphi}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) - \cos\varphi\right].$$

Führt man diesen Wert in (17) ein, so läßt sich zu jedem x das zugehörige r und darauf wegen (16) das zu jedem r gehörige Γ_r bestimmen. Die Berechnung des induzierten Widerstandes mit Hilfe der Gleichung (20) und unter Benutzung der Abb. 3 liefert dann

$$W_{i_{\min}} = 1{,}245\,\frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{\pi}\,. \tag{21}$$

Zum Vergleich sei noch der aus der *Prandtl*schen Tragflügeltheorie folgende Wert angegeben. Er lautet bekanntlich[2]

$$W_{i_{\min}} = \frac{A^2}{\pi\,\frac{\varrho}{2}\,v_0^2 b^2}\,,$$

wo wegen der elliptischen Γ_x-Verteilung

$$A = \varrho\,v_0\,\Gamma_0\,\frac{\pi}{4}\,b\,.$$

Man erhält also nach *Prandtl*

$$W_{i_{\min}} = \frac{\varrho\pi\,\Gamma_0^2}{8} = 1{,}234\,\frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{\pi}\,. \tag{22}$$

Wie man sieht, beträgt der Unterschied der Ausdrücke (21) und (22) nur rund 1 %, womit die Brauchbarkeit der hier gemachten Ansätze erwiesen sein dürfte.

(Eingegangen am 24. Mai 1948.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Walter Kaufmann*, (13b) Gräfelfing, Spitzelbergerstraße 5.

---

[1] Vgl. Fußnote 3 von Seite 187.

[2] Vgl. *A. Betz*, a. a. O.

Beitrag zur instationären laminaren Grenzschicht an ebenen Wänden.

Von **W. Wuest.**

1. Einführung. Bei einer strömenden Flüssigkeit bildet sich längs fester Wände eine Grenzschicht aus, deren Dicke im allgemeinen in Strömungsrichtung zunimmt. Daher hängt die Geschwindigkeit u in dieser Grenzschicht von zwei Ortsvariablen, dem Wandabstand y und der Entfernung x in Strömungsrichtung ab, bei nichtstationärer Strömung außerdem von der Zeit t. Es sind aber auch zeitlich veränderliche Vorgänge denkbar, bei denen die Abhängigkeit von der x-Richtung fortfällt. Wenn wir z. B. eine ebene, unendlich lange Wand in einer ruhenden Flüssigkeit in ihrer Richtung mit zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit bewegen oder der Flüssigkeit längs einer solchen Wand eine zeitlich veränderliche, aber längs der Wand konstante Geschwindigkeit erteilen, ist die Strömungsgeschwindigkeit nur vom Wandabstand und von der Zeit abhängig. Die *Navier-Stokes*schen Gleichungen reduzieren sich dann auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \tag{1}$$

Wegen der Gleichheit dieser Differentialgleichung mit der Wärmeleitungsgleichung kann man die Lösung aus der Theorie der Wärmeleitung übernehmen. Die Lösung ist bekannt, wenn die Anfangswerte für $t=t_0$ und die Randwerte für $y=0$ gegeben sind. Unter Einführung des Fehlerintegrals

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (\Phi(\infty) = 1) \tag{2}$$

lautet die allgemeine Lösung

$$\left.\begin{aligned} u(y,t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u(\eta, t_0) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Phi\left(\frac{y+\eta}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}\right) + \Phi\left(\frac{y-\eta}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}\right)\right] d\eta + \\ + \int_{t_0}^t u(0,t') \frac{\partial}{\partial t'} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t')}}\right) dt' . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In dieser allgemeinen Lösung sind auch die bekannten einfachen Fälle enthalten, bei denen entweder die Flüssigkeit sich im Unendlichen mit konstanter Geschwindigkeit u_1 bewegt und die Wand in Ruhe ist oder die Wand bei anfänglich ruhender Flüssigkeit plötzlich mit einer konstanten Geschwindigkeit u_2 bewegt wird. Im ersten Falle verschwindet wegen $u(0,t')=0$ das zweite Integral, und man erhält durch Ausführung der Integration im ersten Integral die Lösung

$$u = u_1 \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}\right) . \tag{4}$$

Im zweiten Falle fällt wegen $u(\eta, t_0)=0$ das erste Integral fort, und die Integration des zweiten Integrals ergibt

$$u = u_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}\right)\right] . \tag{5}$$

Die beiden Lösungen gehen durch eine Koordinatenverschiebung ineinander über.

Im folgenden sollen einige weitere Lösungsbeispiele behandelt werden. Insbesondere wird auch der Analogiefall zur Grenzschichtabsaugung durch einen Absaugeschlitz untersucht, weil im instationären, aber von x unabhängigen Fall die Lösung verhältnismäßig leicht zu gewinnen ist und daraus ein Lösungsweg für die Behandlung des stationären, aber von x abhängigen Falles vorgezeichnet wird. In einer besonderen weiteren Arbeit soll dieser Weg zur Berechnung dieses Falles verwandt werden.

2. Grenzschichtströmung längs einer mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegten Wand. Wir wollen voraussetzen, daß die Wandgeschwindigkeit $u_2(t)$ durch ein Polynom

$$u_2(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + \cdots v_n t^n \tag{6}$$

dargestellt werden kann und die Flüssigkeit im Anfangszustand in Ruhe ist. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$u(y,t) = \int_{t_0}^{t} u_2(t') \frac{\partial}{\partial t'} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t')}}\right) dt' . \tag{7}$$

Setzen wir $z = \frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t')}}$ bzw. umgekehrt $t' = t - \frac{y^2}{4\nu z^2}$, so läßt sich die Integration ohne weiteres durchführen, wenn man die für das Fehlerintegral $\Phi(z)$ bzw. dessen Ableitung $\Phi'(z) = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$ gültige Rekursionsformel anwendet

$$\int^{z} \frac{1}{z^n} \Phi'(z)\, dz = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{z^{n-1}} \Phi' - \frac{1}{n-1} \int^{z} \frac{2}{z^{n-2}} \Phi'\, dz . \tag{8}$$

Für die ersten Glieder liefert diese Formel

$$\begin{aligned} \int^{z} \Phi'(z)\, dz &= \Phi(z) , \\ \int^{z} \frac{1}{z^2} \Phi'(z)\, dz &= -\frac{1}{z} \Phi' - 2\Phi , \\ \int^{z} \frac{1}{z^4} \Phi'(z)\, dz &= -\frac{1}{3z^3} \Phi' (1 - 2z^2) + \frac{4}{3} \Phi . \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Polynoms (6) in das Integral (7) erhält man nach Ausführung der Integration mit $z_0 = y/\sqrt{4\nu t}$

$$\begin{aligned} u(y,t) = u_2(t)\left(1 - \Phi(z_0)\right) + u_2'(t)\, t \left[2z_0^2\left(1 - \Phi(z_0)\right) - z_0 \Phi'\right] + \frac{1}{2!} u_2''(t) t^2 \left[\frac{4}{3} z_0^4 \left(1 - \Phi(z_0)\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} z_0 \Phi' (1 - 2z_0^2)\right] + \frac{1}{3!} u_2'''(t) t^3 \frac{1}{15} \left[z_0 \Phi' (3 - 2z_0^2 + 4z_0^4) - 8 z_0^6 \left(1 - \Phi(z_0)\right)\right] + \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

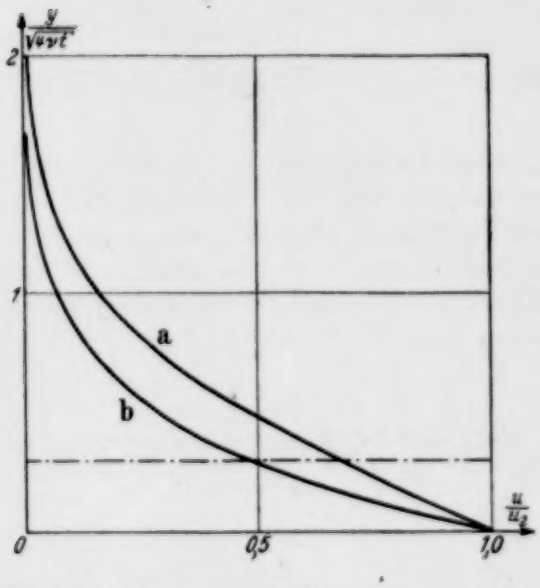

Abb. 1. Instationäre Grenzschicht an einer unendlich langen ebenen Platte mit konstanter Geschwindigkeit (a) und konstanter Beschleunigung (b). Die strichpunktierte Linie $y/\sqrt{4\nu t} = 0{,}3$ bezieht sich auf das Rechenbeispiel des 3. Abschnittes.

Wendet man diese Formel insbesondere auf die mit konstanter Beschleunigung aus der Ruhe bewegte Platte an, so erhält man für die Geschwindigkeitsverteilung wegen $u_2'(t)\, t = u_2(t)$, $u_2''(t) = 0$

$$u(y_1 t) = u_2(t) \left[\left(1 - \Phi(z_0)\right)(1 + 2z_0^2) - z_0 \Phi'(z_0)\right]. \tag{10}$$

Die Funktionen Φ und Φ' sind bei *Jahnke-Emde* tabuliert. Die Lösung ist in Abb. 1 aufgetragen und mit der mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Platte verglichen.

3. Analogie zur Grenzschichtabsaugung. Wenn man die Grenzschicht durch einen Einzelschlitz absaugt, nutzt man gewöhnlich zwei Wirkungen aus, nämlich die Senkenwirkung des Absaugeschlitzes und die Beeinflussung des Grenzschichtprofiles in einem stabilisierenden Sinne. Durch besondere Gestaltung des Absaugeschlitzes (Abb. 2, links) kann man die Senkenwirkung zum Verschwinden bringen, so daß man allein den zweiten Einfluß erhält. Dieser Fall liegt dann vor, wenn durch den Absaugeschlitz lediglich ein gewisser Teil der ursprünglichen Grenzschicht „weggeschnitten" wird. Für die theoretische Behandlung dieses Sonderfalles ist es von Nutzen, den entsprechenden instationären Fall zu untersuchen (Abb. 2, rechts). Es sei also angenommen, daß die Flüssigkeit im Ausgangszustand $t = 0$ die konstante Geschwindigkeit u_1 hat. Längs einer ruhenden festen Wand bildet sich die Grenzschicht entsprechend (4) aus. Im Abstand y_0 sei parallel zur ersten Wand eine zweite angeordnet, die zunächst mit einer solchen Geschwindigkeit bewegt wird, daß die Grenzschichtentwicklung nach Formel (4) nicht gestört wird. Von einem

Zeitpunkt $t=t_0$ an werde aber die zweite Wand zur Ruhe gebracht, und es bildet sich von der zweiten Wand ausgehend eine neue Grenzschicht aus. Läßt man $y=0$ mit der zweiten Wand zusammenfallen, ist die Lösung unter Benutzung von (3) offenbar gegeben durch

$$\frac{u}{u_1} = \Phi\left(\frac{y+y_0}{\sqrt{4\nu t}}\right) - \int_{t_0}^{t} \Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t'}}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t')}}\right) dt'. \tag{11}$$

Ersetzt man in Formel (11) bei der Integration $\Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t'}}\right)$ durch einen passend gewählten Mittelwert $F(y,t)$, so erhält man als Lösung

$$\frac{u}{u_1} = \Phi\left(\frac{y+y_0}{\sqrt{4\nu t}}\right) - F(y,t)\left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}\right)\right]. \tag{12}$$

Da $\Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t'}}\right)$ im Integrationsintervall eine monoton abnehmende Funktion ist, muß offenbar

$$\Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t}}\right) \leqq F(y,t) \leqq \Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t_0}}\right)$$

sein. Für $y=0$ muß wegen $u=0$ an der Wand $F(0,t)=\Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t}}\right)$ sein. *A. Betz* hat im stationären Fall (Abb. 2, links) eine ganz entsprechende Lösung vorgeschlagen, wobei $F=F(0,t)$ angenommen wurde. Durch diese Festsetzung wird lediglich die Bedingung $u=0$ an der Wand erfüllt, während die Differentialgleichung nicht streng erfüllt ist. In Abb. 4 ist diese Lösung als erste Näherung bezeichnet. Um eine genauere Lösung zu finden, untersuchen wir das asymptotische Verhalten des Integrals (7). Man kann dieses durch partielle Integration umformen in

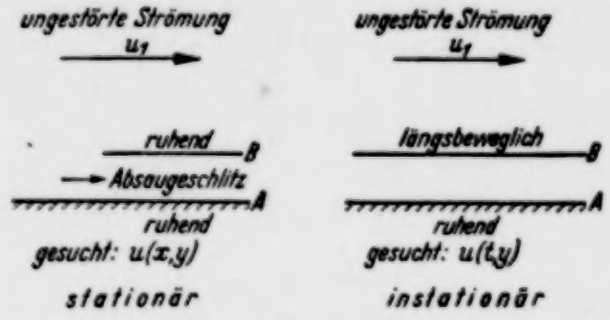

Abb. 2. Vergleich der Grenzschichtabsaugung im stationären Fall mit einem entsprechenden instationären Problem.

$$u(y,t) = u_2(t_0)\left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}\right)\right] - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial u_2(t')}{\partial t'}\left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t')}}\right)\right] dt'. \tag{13}$$

Für das Fehlerintegral gilt aber folgende asymptotische Entwicklung:

$$1-\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-x^2}\,dx \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{\nu=0}^{N} (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{\nu!\,(2z)^{2\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} \cdots\right),$$

$$\int_z^\infty \left[1-\Phi(x)\right] dx = -z\left[1-\Phi(z)\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\left(\frac{1}{2z^2} - \cdots\right).$$

Wenn also $\frac{\partial u_2(t')}{\partial t}$ im Integrationsintervall beschränkt ist, wird der zweite Summand in Formel (13) asymptotisch vernachlässigbar gegenüber dem ersten Summanden, d. h.

$$u(\infty, t) \sim u_2(t_0)\left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}\right)\right]. \tag{14}$$

Für die Funktion F in (12) sind also folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$F(0,t) = \Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t}}\right), \qquad F(\infty,t) = \Phi\left(\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t_0}}\right).$$

Da am Rande die Geschwindigkeit verschwindet, folgt aus der Differentialgleichung (1), daß auch die zweite Ableitung der Geschwindigkeit an der Wand verschwinden muß. Daraus gewinnen wir eine weitere Bedingung für die Funktion F:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=0} - \frac{2}{\sqrt{\pi\nu(t-t_0)}}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=0} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\nu t}\,\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t}}\, e^{-\frac{y_0^2}{4\nu t}} = 0. \tag{15}$$

Der einfachste Näherungsansatz für F ist durch eine Expotentialfunktion gegeben:

$$F = F(0,t) + \left(F(\infty,t) - F(0,t)\right)\left(1 - e^{-\alpha \frac{y}{\sqrt{4\nu(t-t_0)}}}\right). \tag{16}$$

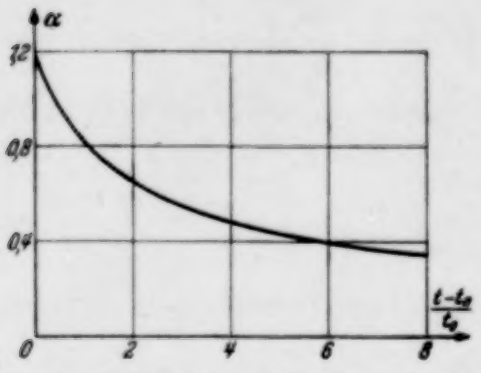

Abb. 3. Hilfsfunktion zur Berechnung des Geschwindigkeitsprofiles nach Gl. (12) und (16).

Diese Lösung ist in Abb. 4 als zweite Näherung bezeichnet. Der Exponentialfaktor α ist noch von der Zeit abhängig. Er wird aus Formel (15) bestimmt zu

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{1+A}-1\right), \\ \text{wobei} \quad A &= \frac{\sqrt{\pi}}{F(\infty,t)-F(0,t)}\,\frac{t-t_0}{t}\,\frac{y_0}{\sqrt{4\nu t}}\,e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Im Grenzfall $t=t_0$ erhält man $A=\pi$.

Als Rechenbeispiel wurde $y_0/\sqrt{4\nu t_0} = 0{,}3$ gewählt und zunächst α in Abhängigkeit von t/t_0 aus Formel (17) berechnet (Abb. 3). Aus (16) und (12) kann dann $F(y,t)$ und die Geschwindigkeitsverteilung berechnet werden. Dies ist für $t/t_0=1{,}6$ und 2,5 durchgeführt worden (Abb. 4. zweite Näherung). Man erkennt, daß die im Vergleich dazu mit $F=F(0,t)$ berechnete erste Näherung nicht wesentlich davon abweicht. Bei der Stabilitätsrechnung kommt es jedoch auf

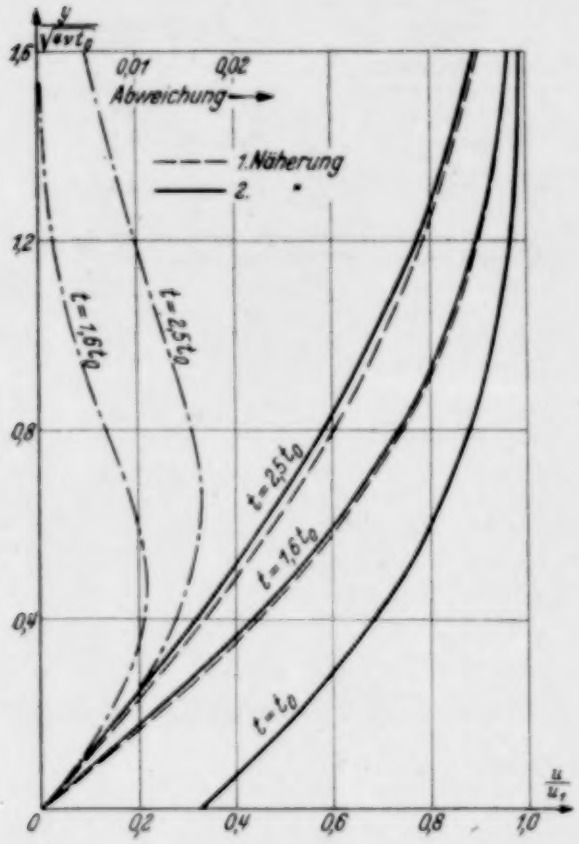

Abb. 4. Geschwindigkeitsprofile beim instationären Analogon zur Grenzschichtabsaugung für $y_0/\sqrt{4\nu t_0} = 0{,}3$.

gestrichelt: erste Näherung; ausgezogen: zweite Näherung; strichpunktiert: Unterschied zwischen beiden (vergrößert).

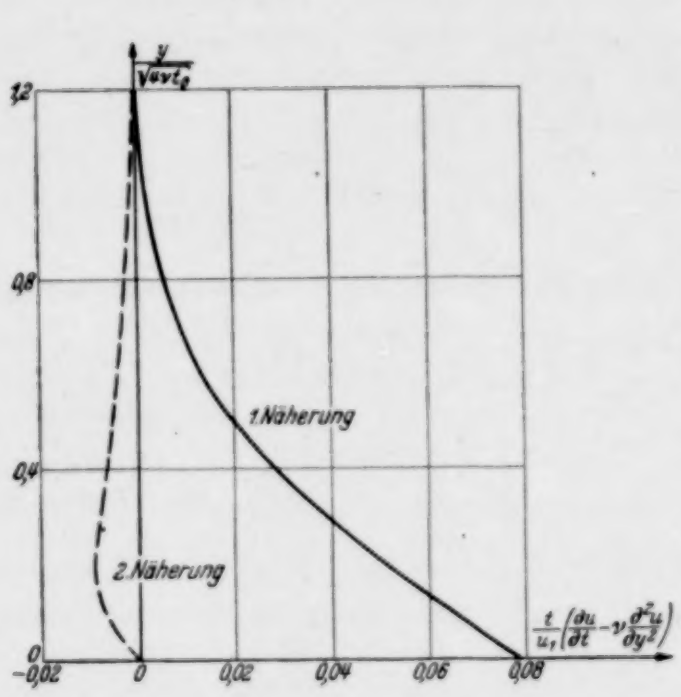

Abb. 5. Fehler der ersten und zweiten Näherung für $y_0/\sqrt{4\nu t_0} = 0{,}3$ und $t/t_0=1{,}6$.

die zweite Ableitung des Geschwindigkeitsprofiles an. Die Unterschiede der beiden Näherungen sind hier beträchtlich. Insbesondere versagt die erste Näherung in Wandnähe vollständig, während die Fehler der zweiten Näherung wesentlich geringer sind, wie man durch Einsetzen der beiden Näherungen in Gleichung (1) feststellen kann. Abb. 5 zeigt die dabei auftretenden Abweichungen gegenüber Gleichung (1).

4. Laminare Strömung an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten. Wenn beispielsweise über eine Wasseroberfläche ein Wind veränderlicher Stärke weht, werden die oberen Wasserschichten mitgenommen, und es bildet sich auch im Wasser eine Grenzschicht aus. Wir wollen dabei annehmen, daß es sich um keine großräumigen Vorgänge handelt, bei denen die durch die Erddrehung hervorgerufenen Corioliskräfte eine entscheidende Rolle spielen, sondern es soll sich um Strömungsvorgänge kleiner Abmessungen handeln und die veränderliche Windstärke durch ein zeitlich veränderliches Druckfeld hervorgerufen werden. Dabei wollen wir im Rahmen unserer bisherigen Überlegungen voraussetzen, daß der Druckgradient $1/\varrho\,\partial p/\partial x = -f(t)$ nur eine Funktion der Zeit ist, dagegen nicht vom Ort abhängt. Aus der *Navier-Stokes*schen Gleichung erhält man dann sowohl für das Wasser als auch für die Luft

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,. \tag{18}$$

Für großen Abstand von der Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten soll $\partial^2 u/\partial y^2$ verschwinden. Aus der Druckgleichheit an der Trennungsfläche folgt weiterhin, daß $f_a(t)/f_b(t) = \varrho_a/\varrho_b$, wobei die Indizes a, b sich auf die beiden Flüssigkeiten, insbesondere Luft und Wasser, beziehen. Für großen Abstand von der Trennungsfläche lauten die Randbedingungen

$$y \longrightarrow \infty: \qquad u = u_1\,,$$

$$y \longrightarrow -\infty: \quad u = \frac{\varrho_a}{\varrho_b}\, u_1 + \text{konst.}$$

Durch die Annahme, daß im Ausgangszustand beide Flüssigkeiten in Ruhe sind, wird konst. $=0$. Die Lösung von (18) ist für die obere Flüssigkeit dann gegeben durch

$$u_a = u_1(t) + \int_{t_0}^{t} \left[u_2(t') - u_1(t')\right] \frac{\partial}{\partial t'}\, \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu_a(t-t')}}\right) dt' \tag{19}$$

und für die untere Flüssigkeit durch:

$$u_b = \frac{\varrho_a}{\varrho_b}\, u_1(t) + \int_{t_0}^{t} \left[u_2(t') - \frac{\varrho_a}{\varrho_b}\, u_1(t')\right] \frac{\partial}{\partial t'}\, \Phi\left(\frac{-y}{\sqrt{4\nu_b(t-t')}}\right) dt'\,. \tag{20}$$

Die Oberflächengeschwindigkeit $u_2(t)$ ist hierbei noch unbekannt. Wir bestimmen sie aus der Bedingung, daß an der Trennungsfläche die Schubspannungen in beiden Flüssigkeiten gleich sein müssen. Wegen der obigen Vorzeichenfestsetzung folgt dann

$$\mu_a \left(\frac{\partial u_a}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{21}$$

Die Oberflächengeschwindigkeit u_2 ergibt sich zu

$$u_2 = \alpha\, u_1 = \frac{\sqrt{r\,m} + r}{1 + \sqrt{r\,m}}\, u_1\,, \tag{22}$$

wobei $r = \varrho_a/\varrho_b$ das Verhältnis der Dichte der beiden Flüssigkeiten und $m = \mu_a/\mu_b$ das Verhältnis der dynamischen Zähigkeiten der beiden Flüssigkeiten ist. Für Wasser von 15° und Luft von 20° C und 760 mm Hg ergeben sich folgende Zahlwerte:

$$m = 0{,}01605, \qquad r = 0{,}001218, \qquad \alpha = 0{,}00554.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Strömung in beiden Flüssigkeiten laminar ist. Bei atmosphärischen Vorgängen ist jedoch die Luftgrenzschicht gewöhnlich turbulent, und die Mitnahmegeschwindigkeit erreicht dann höhere Werte, nämlich etwa 3 % der Windgeschwindigkeit, wie Versuche gezeigt haben und auch rechnerisch nachgewiesen werden kann.

5. Zusammenfassung. Die Entwicklung einer laminaren Grenzschicht wird in der Umgebung ebener Wände oder an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten untersucht, wobei außer der Abhängigkeit von der Zeit nur eine Abhängigkeit vom Abstand von dieser Wand oder Grenzfläche angenommen wird. Für den Fall, daß die Wandgeschwindigkeit in ihrem zeitlichen Verlauf

durch ein Polynom dargestellt werden kann, wird die Lösung in geschlossener Form (9) angegeben. Die Lösung nimmt insbesondere dann eine einfache Gestalt (10) an, wenn die Wand mit konstanter Beschleunigung bewegt wird. Die Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten sind im Fall der gleichmäßig beschleunigten Wand ähnlich, d. h. sie gehen lediglich durch eine Maßstabsänderung auseinander hervor. Es wird weiterhin ein instationäres Analogon zur Grenzschichtabsaugung im stationären aber von der Koordinate x längs der Wand abhängigen Fall untersucht. Das instationäre, aber von x unabhängige Problem ist nämlich viel leichter einer Lösung zugänglich als das stationäre, aber von x abhängige Problem, so daß man erwarten kann, hieraus ein Näherungsverfahren für die Behandlung des stationären Falles zu gewinnen. Dieser Weg soll in einer weiteren Arbeit beschritten werden. Schließlich wird noch die Strömung an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten verschiedener Dichte und Zähigkeit untersucht, wobei angenommen wird, daß die Strömungsbewegung durch ein zeitlich veränderliches Druckfeld hervorgerufen ist. Es ergibt sich dabei, daß das Verhältnis der Grenzflächengeschwindigkeit zur Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht unabhängig von der Zeit ist.

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.

(Eingegangen am 28. Mai 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Walter Wuest*, (20b) Göttingen (Hann.), Böttingerstraße 6/8.

Entwicklung einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugestelle.

Von W. Wuest.

1. Einführung. Die Grenzschichtabsaugung ist ursprünglich angewandt worden, um die Grenzschichtdicke und damit auch die Neigung zur Strömungsablösung zu verringern. Seitdem aber die Eigenschaften widerstandsarmer Körper immer mehr verbessert worden sind, wurde die Aufmerksamkeit in erhöhtem Maße auf die Verringerung der Oberflächenreibung gelenkt. Man war nunmehr bestrebt, die Grenzschicht möglichst lange laminar zu halten, die Umschlagstelle zur Turbulenz also möglichst weit hinauszuschieben. Es wurde erkannt, daß die Grenzschichtabsaugung in diesem Sinne günstig wirkt, und damit gewann die Geschwindigkeitsverteilung in einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugestelle erhöhtes Interesse. Die Stabilität eines laminaren Geschwindigkeitsprofiles wird nämlich in sehr empfindlicher Weise vom Verlauf dieses Profiles beeinflußt.

In einer größeren Anzahl von theoretischen Arbeiten[1] wurde aus Gründen der mathematischen Einfachheit der Fall der kontinuierlichen Absaugung behandelt, wobei eine Durchlässigkeit der Wandfläche angenommen wird. In weiteren Arbeiten wurde die Stabilität der laminaren Grenzschichtprofile bei kontinuierlichem Absaugen behandelt und eine wesentliche Erhöhung der Stabilitätsgrenze festgestellt. Es ist jedoch schwierig, solche durchlässigen Wände mit genügend glatter Oberfläche und ausreichenden Festigkeitseigenschaften technisch zu verwirklichen. Aus baulichen Gründen ist es einfacher, einzelne Absaugeschlitze anzuordnen. Hierbei tritt zu der eigentlichen Absaugewirkung noch die Senkenwirkung hinzu, die erstmals von *L. Prandtl* und *O. Schrenk*[2] eingehend erörtert wurde, und die neuerdings von *Pfenniger*[3] in einer aufschlußreichen experimentellen Untersuchung behandelt worden ist.

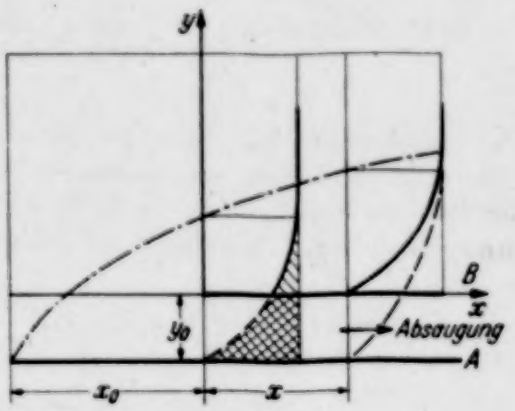

Abb. 1. Grenzschichtabsaugung an der ebenen Platte ohne Senkenwirkung.

Im folgenden wird sowohl von der Senkenwirkung als auch überhaupt von einer Druckänderung längs der Wand abgesehen. Abb. 1 zeigt die praktische Verwirklichung eines solchen Falles. An einer ebenen Platte A möge sich bei konstantem Druck eine laminare Grenzschicht entwickeln („Blasius-Grenzschicht"). Von einer bestimmten Stelle x_0 an sei im Abstand y_0 parallel zur ersten Platte eine zweite Platte B angeordnet, so daß zwischen beiden Platten ein Absaugeschlitz entsteht. Die Absaugeleistung sei gerade so groß, daß lediglich der zwischen beiden Platten befindliche Teil der Grenzschicht entfernt wird. Oberhalb der Platte B beginnt also eine neue laminare Grenzschicht, die sich von der Blasius-Grenzschicht durch eine andere Anfangsbedingung unterscheidet. Die neue Grenzschicht bildet nämlich an ihrem Beginn den Außenteil einer Blasius-Grenzschicht.

2. Grenzschichtgleichung und asymptotisches Verhalten. Durch Einführung der Stromfunktion und des Gesamtdruckes kann die Grenzschichtgleichung in bekannter Weise[4] umgeformt werden in

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \nu u \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}\,, \tag{1}$$

[1] *W. Tollmien* u. *W. Mangler*, Stationäre laminare Grenzschichten in: Monogr. Fortschr. Luftfahrtforsch. Aerodyn. Vers.-Anst. Göttingen (AVA-Monogr.) B 1 (1946). Vgl. auch *H. Schlichting*, Ing.-Arch. 16 (1948) S. 201.

[2] *O. Schrenk*, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933) S. 180.

[3] *W. Pfenniger*, Untersuchungen über Reibungsverminderungen an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe von Grenzschichtabsaugung. Mitt. Inst. Aerodyn. Tech. Hochschule Zürich Nr. 13 (1946).

[4] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938) S. 77.

wobei $g = p + \frac{\varrho}{2} u^2$ und $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Strömung außerhalb der Grenzschicht mit der Geschwindigkeit $u_1 = \text{konst.}$ vor sich geht, also auf die ebene Platte, und setzen ferner

$$g = -\frac{\varrho}{2} u_1^2 \left(1 - q(x, \psi)\right) + \text{konst.} \tag{2}$$

bzw.

$$u = u_1 \sqrt{q} \,. \tag{3}$$

Dieser Ansatz ist so gewählt worden, daß für große ψ-Werte q den Wert 1 annimmt. Gleichung (1) geht damit über in

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \nu u_1 \sqrt{q} \, \frac{\partial^2 q}{\partial \psi^2} \,. \tag{4}$$

Aus der Definition der Stromfunktion und aus (3) erhält man ferner mit $\eta = \psi / \sqrt{\nu u_1 x}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{u_1}{x} \sqrt{\frac{u_1 x}{\nu}} \, \frac{\partial q}{\partial \eta} \,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{u_1}{x^2} \left(\frac{u_1 x}{\nu}\right) \sqrt{q} \, \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} \,. \tag{6}$$

$$y = x \sqrt{\frac{\nu}{u_1 x}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{q}} \, d\eta \,. \tag{7}$$

Um das asymptotische Verhalten der Differentialgleichung (3) zu untersuchen, setzen wir für große Werte von ψ

$$q = 1 - q_w \,, \quad \text{wobei} \quad q_w \ll 1 \,. \tag{8}$$

In erster Näherung erhält man dann

$$\frac{\partial q_w}{\partial x} = \nu u_1 \frac{\partial^2 q_w}{\partial \psi^2} \,. \tag{9}$$

Diese Differentialgleichung ist aber mathematisch identisch mit der Differentialgleichung einer schon[1] behandelten instationären, aber von x unabhängigen Strömung, wobei nun an Stelle der Zeit t die vereinbarte Ortskoordinate x tritt. Sie entspricht auch der bekannten Wärmeleitungsgleichung. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} q_w(\psi, x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty q_w(\psi', x_0) \, \frac{\partial}{\partial \psi'} \left[\Phi\left(\frac{\psi + \psi'}{\sqrt{4 \nu u_1 (x - x_0)}}\right) - \Phi\left(\frac{\psi - \psi'}{\sqrt{4 \nu u_1 (x - x_0)}}\right)\right] d\psi' + \\ + \int_{x_0}^x q_w(0, x') \, \frac{\partial}{\partial x'} \, \Phi\left(\frac{\psi}{\sqrt{4 \nu u_1 (x - x')}}\right) dx' \,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei ist

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} \, dy$$

das bekannte Fehlerintegral. *W. Tollmien*[2] hat diese Lösung für zwei Sonderfälle untersucht, in denen das erste Integral verschwindet. Bei der Absaugegrenzschicht wird dies aber nicht mehr der Fall sein.

3. Blasius-Grenzschicht. Obwohl wir vorausgesetzt haben, daß die Geschwindigkeit u_1 am Rand der Grenzschicht konstant ist, unterscheidet sich doch das hier zu behandelnde Problem der Absaugegrenzschicht dadurch von der Strömung an einer einfachen ebenen Platte („Blasius-Grenzschicht"), daß andere Anfangsbedingungen vorliegen. Die Blasius-Grenzschicht ist vielmehr als spezielle Lösung unter den Absaugegrenzschichten enthalten, in dem dort $x_0 = 0$ ist, also Absaugestelle und Anfang der Platte A (Abb. 1) zusammenfallen. Da wir für die spätere Rechnung von dieser speziellen Lösung Gebrauch machen, wollen wir zunächst die Blasius-Grenzschicht betrachten. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß q lediglich als abhängig von einer Größe

---

[1] *W. Wuest*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 193.

[2] *W. Tollmien*, Über das Verhalten einer Strömung längs einer Wand am äußeren Rand ihrer Reibungsschicht. *Betz*-Festschrift AVA-Göttingen (1945) S. 218.

$\eta = \psi/\sqrt{\nu u_1 x}$ betrachtet werden kann. Man erhält dann aus (4) folgende Differentialgleichung der Blasius-Grenzschicht:

$$\eta \frac{\partial \sqrt{q_B}}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 q_B}{\partial \eta^2} = 0 . \tag{11}$$

Die Lösung läßt sich in folgender Form schreiben:

$$q_B = \beta \eta \left(1 + a_1 \left(\frac{\eta^3}{\beta}\right)^{1/2} + a_2 \left(\frac{\eta^3}{\beta}\right)^{2/2} + a_3 \left(\frac{\eta^3}{\beta}\right)^{3/2} + \cdots\right) . \tag{12}$$

Die Konstanten a_i haben dabei folgende Werte:

$$a_1 = -\frac{2}{15}, \qquad a_5 = 0{,}57627 \cdot 10^{-6}, \qquad a_9 = 3{,}7282 \cdot 10^{-12},$$
$$a_2 = \frac{1}{90}, \qquad a_6 = 3{,}8907 \cdot 10^{-9}, \qquad a_{10} = 2{,}2383 \cdot 10^{-13},$$
$$a_3 = \frac{-7}{(990 \cdot 15)}, \qquad a_7 = -1{,}3986 \cdot 10^{-9}, \qquad a_{11} = -0{,}3104 \cdot 10^{-14},$$
$$a_4 = 1{,}60333 \cdot 10^{-6}, \qquad a_8 = -3{,}9135 \cdot 10^{-11}, \qquad a_{12} = -1{,}081 \cdot 10^{-15}.$$

Eine Integrationskonstante ist wegen der Randbedingung an der Wand Null. Die zweite Integrationskonstante bestimmt man aus dem asymptotischen Verhalten für große Werte von η. Wegen $q_w(\psi, 0) = 0$ fällt das erste Integral in (10) weg. Das zweite Integral liefert aber durch partielle Integration unter Beachtung des asymptotischen Verhaltens des Fehlerintegrals ebenso wie bei dem schon[1] behandelten Fall die Lösung

$$q_{wB} \sim \gamma \left[1 - \Phi\left(\frac{\psi}{\sqrt{4 \nu u_1 x}}\right)\right] . \tag{13}$$

Die Konstanten β in (12) und γ in (13) bestimmt man dadurch, daß für große η-Werte q und $\partial q/\partial \eta$ nach (12) und (13) miteinander übereinstimmen. Die Neuberechnung der beiden Konstanten ergab folgende Werte:

$$\beta = 0{,}6642, \qquad \gamma = 0{,}828 .$$

Im Vergleich dazu gibt *L. Prandtl*[2] folgende von *Blasius* und *Toepfer* errechneten Werte an, die auf die obigen Bezeichnungen umgerechnet lauten:

$$\beta = 2 \cdot 0{,}332 = 0{,}664 ,$$
$$\gamma = 2\sqrt{\pi}\, 0{,}231 = 0{,}819 .$$

F. Riegels und *J. A. Zaat* geben in einer neuen Arbeit[3] für γ folgenden Wert an:

$$\gamma = 0{,}342 \sqrt{2\pi} = 0{,}857 .$$

In Zahlentafel 1 und Abb. 2 ist die Funktion q mit erster und zweiter Ableitung tabuliert und aufgetragen worden[4].

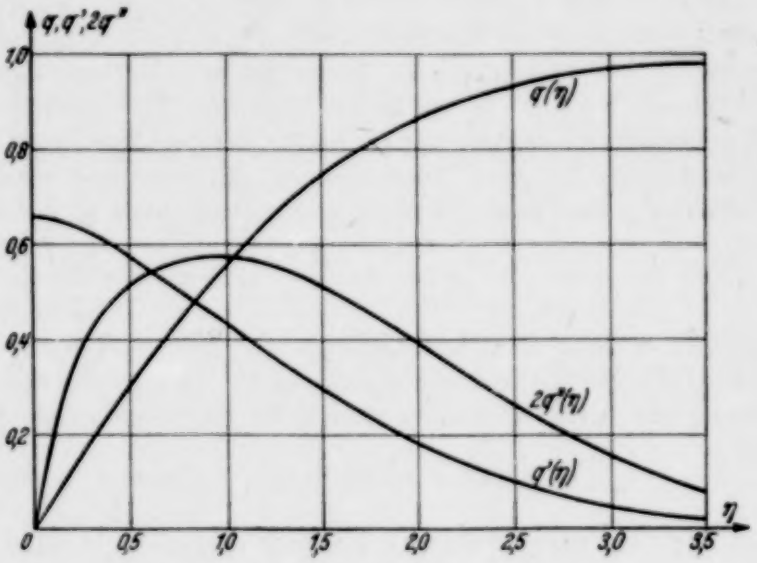

Abb. 2. Die Funktion $q(\eta)$ der Blasius-Grenzschicht mit erster und zweiter Ableitung.

4. Asymptotisches Verhalten der Absaugegrenzschicht. Zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens der Absaugegrenzschicht zerlegen wir die durch (8) erklärte Funktion q_w in zwei Anteile:

$$q_w = q_{w1} + q_{w2} .$$

Der erste Anteil soll so gewählt werden, daß er die Anfangsbedingung an der Absaugestelle $x = x_0$ erfüllt, indem die asymptotische Lösung der *Blasius*-Grenzschicht auch für $x > x_0$ fortgesetzt wird. Aus (13) erhält man dann

$$q_{w1} = \gamma \left[1 - \Phi\left(\frac{\psi + \psi_0}{\sqrt{4 \nu u_1 x}}\right)\right] .$$

---

[1] *W. Wuest*, a. a. O.
[2] *L. Prandtl*, in *F. W. Durand* Aerodynamic Theory Bd. 3 (1935) S. 88.
[3] *F. Riegels* u. *J. A. Zaat*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1947, S. 42.
[4] Die Zahlentafel ist mit den Werten $\beta = 0{,}664$ und $\gamma = 0{,}819$ errechnet worden.

Zahlentafel 1. *Blasius-Grenzschicht.*

η	$q(\eta)$	$q'(\eta)$	$q''(\eta)$	$\sqrt{q(\eta)}$
0	0	0,6640	0	0
0,1	0,06606	0,6555	0,12751	0,2570
0,2	0,13106	0,6427	0,17750	0,3620
0,3	0,1939	0,6206	0,2114	0,4404
0,4	0,2546	0,5981	0,2369	0,5046
0,5	0,3135	0,5734	0,2561	0,5599
0,6	0,3695	0,5471	0,2700	0,6079
0,7	0,4228	0,5195	0,2796	0,6502
0,8	0,4681	0,4912	0,2856	0,6842
0,9	0,5211	0,4625	0,2883	0,7212
1,0	0,5659	0,4337	0,2883	0,7523
1,1	0,6081	0,4062	0,2857	0,7798
1,2	0,6469	0,3766	0,2809	0,8043
1,3	0,6831	0,3487	0,2743	0,8265
1,4	0,7167	0,3217	0,2660	0,8466
1,5	0,7474	0,2955	0,2563	0,8645
1,6	0,7758	0,2705	0,2457	0,8807
1,7	0,8017	0,2466	0,2340	0,8954
1,8	0,8252	0,2238	0,2248	0,9084
1,9	0,8465	0,2022	0,2088	0,9200
2,0	0,8657	0,1820	0,1955	0,9304
2,5	0,9352	0,1013	0,1303	0,9671
3,0	0,9715	0,0509	0,0774	0,9857
3,5	0,9881	0,0217	0,0381	0,9940
4,0	0,9962	0,0085	0,0169	0,9981
4,5	0,9988	0,0029	0,0066	0,9994
5,0	0,9997	0,0009	0,0022	0,9998

Hierbei bildet $\psi=0$ die neue Wandstromlinie und ψ_0 die Absaugemenge. Der zweite Anteil q_{w2} muß dann so gewählt werden, daß die Randbedingung $q_w = q_w(0,x)$ erfüllt wird. Wenn die asymptotische Beziehung $q \sim 1-q_w$ im ganzen Bereich der Grenzschicht streng gelten würde, müßte wegen $q=0$ an der Wand $q_w(0,x)=1$ sein. Die asymptotische Lösung weicht aber von der strengen Lösung ab, wenn man sie bis an die Wand fortsetzt. Daher ist $q_w(0,x)$ eine unbekannte Funktion, von der wir lediglich voraussetzen, daß sie nicht unendlich wird. Als Anfangsbedingung für den Anteil q_{w2} hat man ferner $q_{w2}(\psi, x_0)=0$, weil ja bereits $q_{w1}(\psi, x_0)$ die Anfangsbedingung

$$q_w = \gamma\left[1-\Phi\left(\frac{\psi+\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x_0}}\right)\right]$$

erfüllt, welche den Anschluß an die *Blasius*-Lösung gewährleistet. Der Lösungsanteil q_{w2} muß ebenfalls der Differentialgleichung (9) folgen. In der Lösung (10) fällt aber wegen $q_{w2}(\psi, x_0)=0$ das erste Integral weg, während im zweiten Integral zu setzen ist

$$q_{w2}(0,x) = q_w(0,x) - q_{w1}(0,x) = q_w(0,x) - \gamma\left[1-\Phi\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x}}\right)\right],$$

so daß die asymptotische Lösung insgesamt lautet

$$q_w = \gamma\left[1-\Phi\left(\frac{\psi+\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x}}\right)\right] + \int_{x_0}^{x}\left\{q_w(0,x') - \gamma\left[1-\Phi\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x'}}\right)\right]\right\}\frac{\partial}{\partial x'}\,\Phi\left(\frac{\psi}{\sqrt{4\nu u_1 (x-x'_0)}}\right)dx'.$$

Durch partielle Integration erhält man unter Beachtung des asymptotischen Verhaltens des Fehlerintegrals[1]

$$q_w \sim \gamma\left[1-\Phi\left(\frac{\psi+\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x}}\right)\right] + \left\{q_w(0,x_0) - \gamma\left[1-\Phi\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x_0}}\right)\right]\right\}\left[1-\Phi\left(\frac{\psi}{\sqrt{4\nu u_1 (x-x_0)}}\right)\right].$$

Wegen des Anschlusses an die *Blasius*-Lösung ist jedoch, wenn man die asymptotische Lösung bis an die Wand fortsetzt, $q_w(0,x_0)=\gamma$, so daß man schließlich als asymptotische Lösung für die Absaugegrenzschicht erhält

$$q_w \sim \gamma\left[1-\Phi\left(\frac{\psi+\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x}}\right)\right] + \gamma\,\Phi\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x_0}}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\psi}{\sqrt{4\nu u_1 (x-x_0)}}\right)\right]. \qquad (14)$$

[1] *W. Wuest*, a. a. O.

Statt der Fehlerintegrale Φ kann man für große Werte von ψ wieder auf die *Blasius*-Lösung zurückgehen, wenn man deren asymptotisches Verhalten nach (8) und (13) berücksichtigt:

$$q \sim q_B\left(\frac{\psi+\psi_0}{\sqrt{\nu u_1 x}}\right) - \Phi\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x_0}}\right)\left[1 - q_B\left(\frac{\psi}{\sqrt{\nu u_1 (x-x_0)}}\right)\right]. \tag{15}$$

In dieser Formel stellt q_B die *Blasius*-Lösung dar. Die letzte Form der Lösung erweist sich für die weiteren Betrachtungen als besonders zweckmäßig.

5. Näherungslösung für die Absaugegrenzschicht. Es ist naheliegend, die für große Werte von ψ gültige asymptotische Lösung in folgender Weise zu verallgemeinern:

$$q = q_B\left(\frac{\psi+\psi_0}{\sqrt{\nu u_1 x}}\right) - F(\psi, x)\left[1 - q_B\left(\frac{\psi}{\sqrt{\nu u_1 (x-x_0)}}\right)\right]. \tag{16}$$

Wegen $q=0$ für $\psi=0$ und wegen (15) muß die Funktion $F(\psi, x)$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$F(0, x) = q_B\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{\nu u_1 x}}\right), \qquad F(\infty, x) = \Phi\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{4\nu u_1 x_0}}\right). \tag{17}$$

Es wurde zunächst erhofft, daß man entsprechend wie im instationären Analogon[1] für F als einfachsten Ansatz eine Exponentialfunktion wählen könnte, wobei als weitere Bedingung neben (17) noch das Verschwinden der zweiten Ableitung von q an der Wand hinzutritt. Es hat sich jedoch gezeigt, daß ein solcher Ansatz nicht zum Erfolg führt und in einem gewissen Bereich sogar überhaupt keine reelle Lösung liefert.

Für die weitere Rechnung führen wir folgende vereinfachte Schreibweise ein:

$$\frac{\psi+\psi_0}{\sqrt{\nu u_1 x}} = \eta, \quad \frac{\psi}{\sqrt{\nu u_1 (x-x_0)}} = \eta', \quad \frac{\psi_0}{\sqrt{\nu u_1 x}} = \eta_0, \quad \eta = \eta_0 + \sqrt{\frac{x-x_0}{x}}\,\eta', \tag{18}$$

so daß die Lösung (16) lautet

$$q = q_B(\eta) - F\left[(1 - q_B(\eta')\right]. \tag{19}$$

Einem Vorschlag von *A. Betz* entsprechend setzen wir als erste Näherung q_1 die Funktion F gleich dem nur von x abhängigen Wert

$$F_0(x) = F(0, x) = q_B\left(\frac{\psi_0}{\sqrt{\nu u_1 x}}\right) = q_B(\eta_0) \tag{20}$$

an der Wand. Damit lautet die erste Näherung

$$q_1 = q_B(\eta) - F_0\left[(1 - q_B(\eta')\right]. \tag{21}$$

Dieser Ansatz erfüllt die Grenzschichtgleichung (3) nicht exakt. Insbesondere verschwindet die zweite Ableitung von q_1 an der Wand nicht. Die Stabilität des Geschwindigkeitsprofiles hängt aber in empfindlicher Weise von der zweiten Ableitung ab, so daß man noch eine genauere Lösung suchen muß. Durch Einsetzen der Näherungslösung (21) in die Grenzschichtgleichung (3) erhält man

$$q_B''(\eta)\,\frac{x-x_0}{x} - \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2}\left\{F_0\left[1 - q_B(\eta')\right]\right\} = 2(x-x_0)\,\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{q_1} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \eta'^2}.$$

Hieraus ergibt sich $\partial^2\varepsilon_1/\partial\eta'^2$ als der Fehler dieser ersten Näherung. Durch Subtraktion der exakten Lösung, in der F statt F_0 und q statt q_1 steht und dafür ε_1 verschwindet, erhält man dann

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta'^2}\left\{(F - F_0)\left[1 - q_B(\eta')\right]\right\} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \eta'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \eta'^2}, \tag{22}$$

wobei

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \eta'^2} = \varepsilon_2'' = 2(x-x_0)\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{q_1} - \sqrt{q}\right]$$

eine unbekannte Funktion ist. Die Größe ε_2'' verschwindet für $\eta'=0$ und $\eta'=\infty$. Durch Integration von (22) erhält man

$$(F - F_0)\left[1 - q_B(\eta')\right] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{23}$$

---

[1] *W. Wuest*, a. a. O.

Hierbei ist ε_1 durch zweimalige Quadratur graphisch oder numerisch zu bestimmen:

$$\varepsilon_1 = \int_{\infty}^{\eta'} \int_{\infty}^{\eta_2} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \eta_1^2} \, d\eta_1 \, d\eta_2 \,. \tag{24}$$

Das asymptotische Verhalten von ε_2 kann man dadurch bestimmen, daß man in der obigen Definition von ε_2'' für $\sqrt{q_1}$ und $\sqrt{q}$ die asymptotischen Werte $\sqrt{q_1} \sim 1 - \frac{1}{2} q_{w1}$ und $\sqrt{q} \sim 1 - \frac{1}{2} q_w$ setzt. Dadurch erhält man

$$\varepsilon_2'' \sim (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} (q_w - q_{w1}) \,.$$

Unter Benutzung von (9), (19), (21) und zweimaliger Integration nach $\eta' = \psi / \sqrt{\nu u_1 (x - x_0)}$ folgt daraus

$$\varepsilon_2 \sim \gamma (F_\infty - F_0) \left[1 - \Phi \left(\frac{\eta'}{2} \right) \right] . \tag{25}$$

Hierbei bezeichnet Φ wie früher das Fehlerintegral. Allgemein denken wir uns ε_2 in folgender Weise dargestellt:

$$\varepsilon_2 = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa (x) \left[1 - \Phi \left(\varkappa \frac{\eta'}{2} \right) \right] . \tag{26}$$

Näherungsweise beschränken wir uns auf die ersten beiden Glieder, wobei $a_1 = \gamma (F_\infty - F_0)$ und a_2 dadurch bestimmt ist, daß q an der Wand verschwinden muß. Wir bestimmen demnach die Funktion F näherungsweise zu

$$F = F_0 + \frac{1}{1 - q_B(\eta')} \left\{ \varepsilon_1 (\eta', x) + \gamma (F_\infty - F_0) \left[1 - \Phi \left(\frac{\eta'}{2} \right) \right] + a_2 \left[1 - \Phi' (\eta') \right] \right\} , \tag{27}$$

$$a_2 = - \varepsilon_1 (0, x) - \gamma (F_\infty - F_0) \,. \tag{28}$$

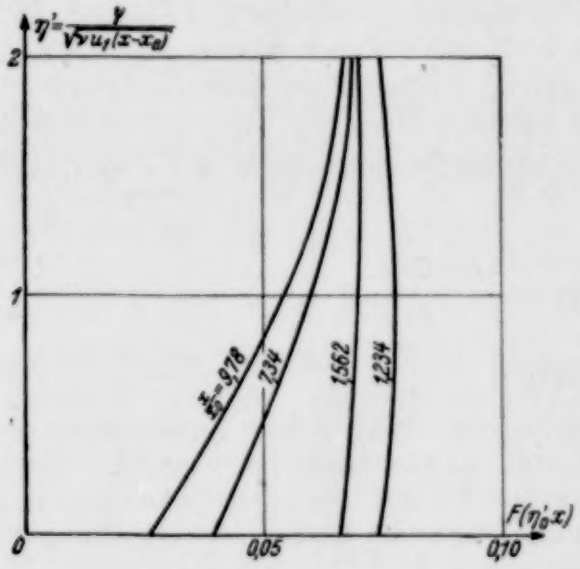

Abb. 3. Hilfsfunktion $F(\eta', x)$ zur Berechnung der Absaugegrenzschicht für $\psi_0 / \sqrt{\nu u_1 x_0} = 0{,}125$.

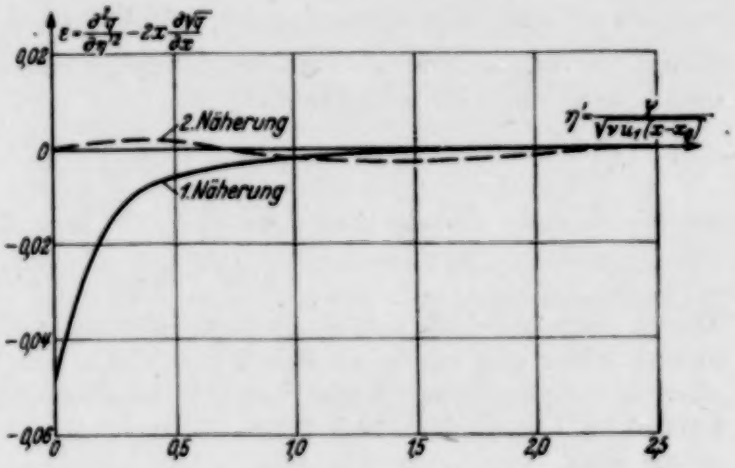

Abb. 4. Fehler der ersten und zweiten Näherung für $x/x_0 = 1{,}562$.

Rechenbeispiel. Als Rechenbeispiel wurde $\psi_0 / \sqrt{\nu u, x_0} = 0{,}125$ gewählt und F für die Werte $x/x_0 = 1{,}234$, 1,562, 4,34 und 9,78 berechnet und in Abb. 3 aufgetragen. Für $x/x_0 = 1{,}562$ wurde durch Einsetzen der Näherungslösung in die Grenzschichtgleichung der Fehler bestimmt und mit der ersten Näherung nach (21) verglichen. Es ergibt sich gegenüber der ersten Näherung eine wesentliche Verbesserung besonders im wandnahen Bereich (Abb. 4). In Abb. 5 sind die Ergebnisse auf das Geschwindigkeitsprofil umgerechnet und in Abb. 6 die zweite Ableitung dargestellt.

Als Ergänzung soll noch der Zusammenhang zwischen dem Absaugegrad und der Absaugemenge von der Größe $\eta_0^* = \psi_0 / \sqrt{\nu u_1 x_0}$ nachgetragen werden. Unter Absaugegrad Θ ist dabei

$$\Theta = 1 - \frac{\delta_2^*}{\delta_1^*} \tag{29}$$

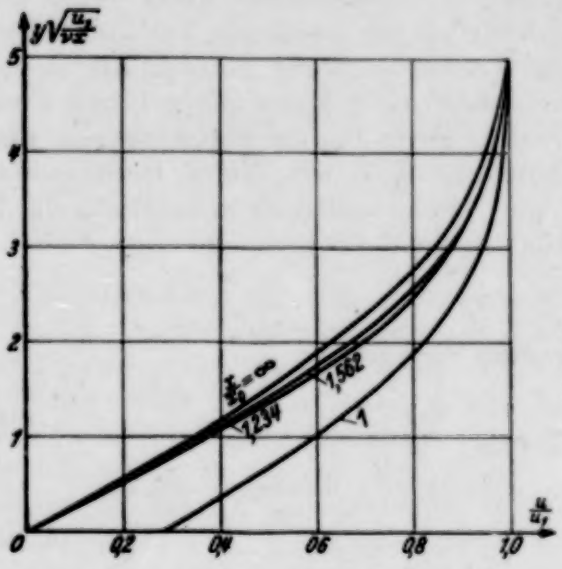

Abb. 5. Geschwindigkeitsprofile der Absaugegrenzschicht für $\psi_0/\sqrt{\nu\, u_1\, x_0} = 0{,}125$ und verschiedenen Abstand von der Absaugestelle.

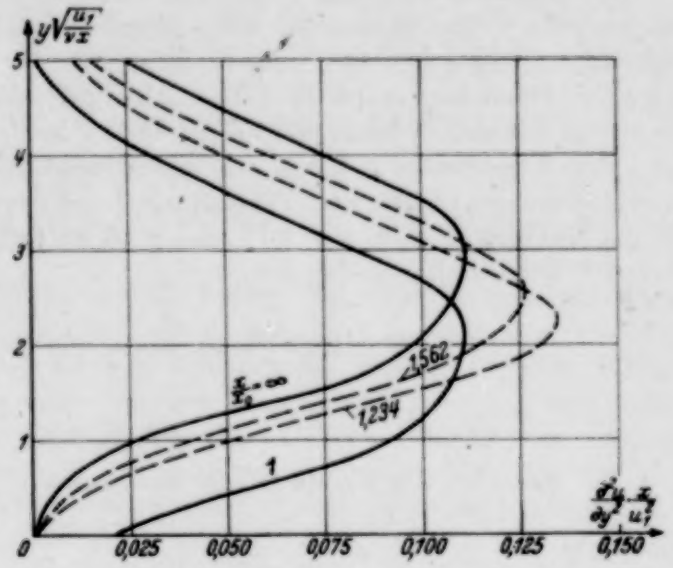

Abb. 6. Zweite Ableitung der Geschwindigkeitsprofile der Absaugegrenzschicht für $\psi_0/\sqrt{\nu\, u_1\, x_0} = 0{,}125$.

verstanden, wobei δ_1^* die Verdrängungsdicke unmittelbar vor der Absaugestelle und δ_2^* unmittelbar hinter der Absaugestelle ist. Damit ist Θ gegeben durch

$$\Theta = \frac{\int_0^{\psi_0} \left(\frac{1}{\sqrt{q_B}} - 1\right) d\psi}{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{q_B}} - 1\right) d\psi}. \tag{30}$$

Die sich daraus ergebenden Werte sind in Zahlentafel 2 tabuliert und in Abb. 7 aufgetragen.

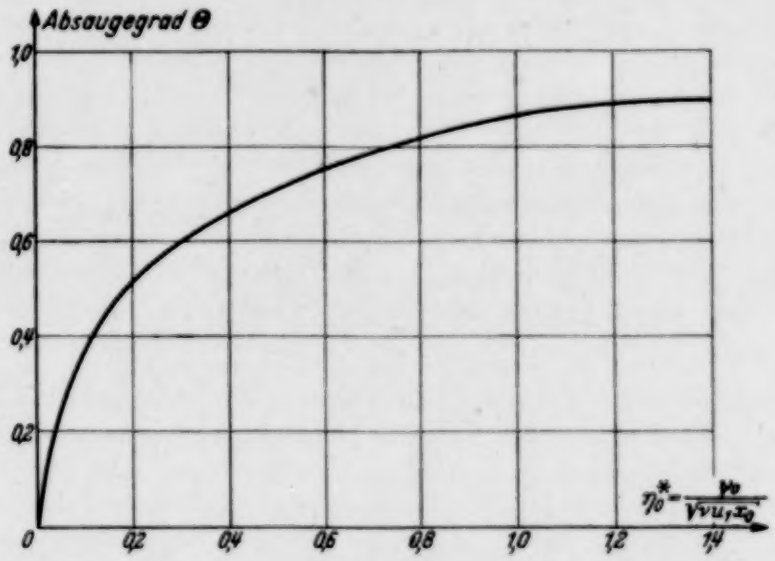

Abb. 7. Absaugegrad (Verhältnis der in Abb. 1 kreuzschraffierten zur gesamten schraffierten Fläche).

Zahlentafel 2. *Absaugegrad.*

η_0^*	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0
Θ	0	0,392	0,520	0,671	0,762	0,824	0,870	0,974

Die Absaugemenge ψ_0 ist ferner durch folgende Beziehung gegeben:

$$\psi_0 = \sqrt{\nu\, u_1\, x_0}\ \eta_0^*. \tag{31}$$

6. Zusammenfassung. Die Entwicklung einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugestelle wird untersucht, wenn durch die Absaugung lediglich der wandnahe Teil der Grenzschicht „weggeschnitten" wird, ohne daß der Schlitz eine Senkenwirkung ausübt. Als Grundlage der Rechnung wird die Grenzschichtgleichung in der von *Prandtl-Mises* angegebenen Form benutzt, die der Wärmeleitungsgleichung bzw. der Differentialgleichung der instationären, aber von der Koordinate x längs der Wand unabhängigen Strömung nahesteht. Unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens der Lösung wird eine Näherungslösung entwickelt, die in ihrem Aufbau ähnlich wie die Lösung des instationären Analogons ist, das bereits in einer früheren Arbeit[1] behandelt worden ist.

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.

(Eingegangen am 28. Mai 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Walter Wuest*, (20b) Göttingen (Hann.), Böttingerstraße 6/8.

[1] *W. Wuest*, a. a. O.

Ein Gerät zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten.

Von H. Ludwieg.

1. Einleitung. In der aerodynamischen Meßtechnik liegt häufig die Aufgabe vor, die Wandschubspannung einer turbulenten Reibungsschicht zu bestimmen, da sie für den gesamten Strömungsvorgang von entscheidender Bedeutung ist. Ihre Messung macht jedoch große Schwierigkeiten. Die direkte Messung mittels einer Waage, wie sie von *Schultz-Grunow*[1] ausgeführt wurde, ist wegen des beträchtlichen apparativen Aufwandes nur in Sonderfällen durchführbar. Insbesondere ist sie auf Strömungen mit annähernd konstantem Druck im Bereich der Meßplatte beschränkt, da sonst unkontrollierbare Spaltströmungen auftreten, die erhebliche Meßfehler hervorrufen. Ein anderes bisher verwandtes Verfahren zu ihrer Bestimmung beruht darauf, daß man mit einem feinen Pitotrohr die gesamte Grenzschicht ausmißt und mittels des Impulssatzes dann die Wandschubspannung berechnet. Dieses Verfahren erfordert jedoch einen sehr hohen Arbeitsaufwand, da man in einem großen Gebiet die Strömungsgeschwindigkeit sowohl nach Größe wie nach Richtung bestimmen muß. Außerdem sind die Reibungsschichten in vielen Fällen so dünn, daß die experimentelle Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung in der Reibungsschicht überhaupt nicht durchführbar ist. Die Meßgenauigkeit dieses Verfahrens ist bei komplizierten Strömungsvorgängen sehr schlecht, da der Meßwert (die Wandschubspannung) durch Differentiation schwach veränderlicher Größen (Impulsverlust der Reibungsschicht) bestimmt werden muß, was bekanntlich zu ungenauen Ergebnissen führt, selbst wenn die zu differentierenden Größen relativ genau gemessen sind. Wegen dieser Schwierigkeiten konnte dieses Verfahren bisher auch nur bei relativ einfachen Strömungsvorgängen mit Erfolg verwandt werden.

Ein anderes Verfahren zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten wurde von *A. Fage* und *V. M. Falkner*[2] angegeben. Hierbei befindet sich an der Stelle der Wand, an der die Schubspannung gemessen werden soll, eine Druckanbohrung. Im kurzen Abstand ($\approx {}^1/_{20}$ mm) über dieser Bohrung befindet sich eine scharfkantige Schneide. Zwischen Schneide und Wand wird dann der wandnahe Teil der Reibungsschicht (die laminare Unterschicht) aufgestaut. Die Druckerhöhung unter der Schneide gegenüber dem ungestörten statischen Druck liefert dann ein Maß für die Wandschubspannung, da die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe der Schubspannung eindeutig zugeordnet ist. Dieses Verfahren konnte sich jedoch wegen der schwierigen Handhabung und der sehr empfindlichen Meßsonde nur wenig durchsetzen.

Bei dem hier geschilderten Verfahren wird nun die Schubspannungsmessung auf eine Wärmeübergangsmessung zurückgeführt. Wie der Verfasser nachträglich erfuhr, hat *H. Reichardt* bereits 1945 Betrachtungen über die Ermittlung der Wandschubspannung aus der örtlichen Wärmeabgabe angestellt (noch unveröffentlicht).

2. Physikalische Grundlagen der Schubspannungsmessung. Sowohl für die turbulenten Reibungsschichten an einer glatten ebenen Platte ohne Druckgradienten in Strömungsrichtung sowie für die turbulenten Reibungsschichten in glatten Rohren oder Kanälen mit konstantem Querschnitt kann man den wandnahen Teil des Geschwindigkeitsprofiles bekanntlich[3] einheitlich in der folgenden Form darstellen:

$$\frac{u}{u^*} = f\left(\frac{y\,u^*}{\nu}\right) = f(y^*)\,, \tag{1}$$

wobei f in allen Fällen stets dieselbe Funktion ist; u ist die Strömungsgeschwindigkeit, y der Wandabstand, ν die kinematische Zähigkeit und u^* die sogenannte Schubspannungsgeschwindigkeit, die durch die Gleichung $u^* = \sqrt{\tau_W/\varrho}$ definiert ist. Dabei ist τ_W die auf die Wand übertragene Schubspannung und ϱ die Dichte. Für $y\,u^*/\nu$ ist zur Abkürzung y^* geschrieben. Diese Beziehung, die sich auf Grund von Dimensionsbetrachtungen ableiten läßt, wird durch Messungen bestens

[1] *F. Schultz-Grunow*, Z. Luftfahrtforschung 17 (1940) S. 239.
[2] *A. Fage* and *V. M. Falkner*, Proc. Roy. Soc. London (A) 129 (1930) S. 378.
[3] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömunglehre, S. 112 ff. Braunschweig 1942.

bestätigt[1]. Für y^*-Werte, die größer als 50 sind, wird die Schubspannung praktisch vollkommen durch den turbulenten Austausch übertragen, während die innere Reibung keinen nennenswerten Beitrag mehr zur Schubspannungsübertragung liefert. Hier nimmt (1) dann die folgende Form an:

$$\frac{u}{u^*} = a \log y^* + b \,, \tag{2}$$

die als sogenanntes logarithmisches Geschwindigkeitsgesetz bekannt ist. Dabei sind a und b universelle Konstanten.

In unmittelbarer Wandnähe, d. h. für sehr kleine y^*-Werte, wird der turbulente Austausch durch die Anwesenheit der Wand unterbunden. Die Schubspannung wird dann allein durch die innere Reibung des strömenden Mediums übertragen. Aus der Definitionsgleichung für die innere Reibung $\tau = \mu\, \partial u/\partial y$ (τ = Schubspannung, μ = Zähigkeit) und der Randbedingung $u = 0$ für $y = 0$ ergibt sich dann, daß (1) für diese kleinen y^*-Werte die folgende Form annimmt:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{y u^*}{\nu} = y^* . \tag{3}$$

Diese rein laminare, wandnahe Schicht wird als laminare Unterschicht der turbulenten Reibungsschicht bezeichnet.

Zwischen diesen beiden Teilen der Grenzschicht befindet sich noch ein Übergangsgebiet, in dem die Schubspannung teils durch turbulenten Austausch und teils durch innere Reibung übertragen wird.

Um nun die Dicke der laminaren Unterschicht und den Verlauf der Funktion (1) im Bereich der Übergangsschicht festzustellen, wurden von *H. Reichardt*[2] Grenzschichtprofilmessungen vorgenommen, die bis in die laminare Unterschicht hineinreichen. Da diese Unterschicht im allgemeinen nur sehr dünn ist, mußten diese Messungen bei sehr kleinen u^*-Werten, das bedeutet bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, durchgeführt werden, da nur dann die Unterschicht eine solche Dicke annimmt, daß sie mit feinen Hitzdrähten und Pitotrohren vermessen werden konnte. Die Messungen zeigten, daß das laminare Gesetz (3) nur bis zu y^*-Werten von etwa 1,5 bis 2 streng gilt. Bei $y^* = 5$ weicht die Geschwindigkeit ungefähr 10 % und bei $y^* = 10$ ungefähr 25 % vom Gesetz (3) ab.

Alle bisherigen Messungen und theoretischen Untersuchungen, die zeigen, daß sich die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe in der Form (1) darstellen läßt, beziehen sich auf die beiden Sonderfälle: ausgebildete turbulente Strömung in einem Kanal oder Rohr und Strömung längs einer Wand bei konstanter Geschwindigkeit außerhalb der Reibungsschicht (konstanter Druck in Strömungsrichtung). Für unsere Schubspannungsmessungen interessiert uns jetzt aber gerade der Geschwindigkeitsverlauf in unmittelbarer Wandnähe in allgemeinen Fällen, d. h. bei Strömungen mit erheblichem Druckanstieg bzw. Druckabfall in Strömungsrichtung. Wir können jedoch auch hier annehmen, daß näherungsweise für sehr wandnahe Punkte (1) gilt. Für die laminare Unterschicht ist dies einfach zu zeigen. Die Schubspannung τ in einem kleinen Wandabstand ist jetzt zwar von der Wandschubspannung τ_W etwas verschieden, da für wandnahe Punkte aus der allgemeinen *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung $\partial\tau/\partial y = dp/dx$ folgt. Aber bei den normalerweise vorkommenden Druckanstiegen bzw. Gefällen und der sehr geringen Dicke dieser Unterschicht ist dieser Schubspannungsabfall bzw. Anstieg innerhalb der laminaren Unterschicht so gering, daß hier immer noch in guter Näherung $\tau = \tau_W = \text{konst.}$ und damit auch (3) bzw. (1) gilt. Es ist aber auch zu erwarten, daß das Übergangsgebiet vom rein laminaren zum turbulenten Teil noch in guter Näherung durch (1) wiedergegeben wird; denn auch diese Schicht ist noch so dünn, daß die Schubspannungsänderung durch den Druckgradienten nur geringfügig ist. Auch der in größeren Wandabständen weit von dem Gesetz (1) abweichende Strömungszustand läßt kaum einen Einfluß in Wandnähe erwarten; denn auch das Geschwindigkeitsprofil bei der Plattenströmung ohne Druckanstieg und das Geschwindigkeitsprofil bei einer Kanal- oder Rohrströmung sind in großen Wandabständen sehr verschieden und werden trotzdem in Wandnähe sehr gut durch (1) wiedergegeben. Für den anschließenden wandnahen Teil des rein turbulenten Gebietes trifft das eben Gesagte ebenfalls noch näherungsweise zu.

Diese Überlegungen zeigen also, daß auch bei Reibungsschichten mit Druckgradienten in Strömungsrichtung in Wandnähe das gleiche allgemeine Geschwindigkeitsgesetz (1) wie bei konstantem Druck gilt. Dabei ist jedoch zu erwarten, daß die Abweichungen von diesem Gesetz in um so kleinerem Wandabstand beginnen, je größer der Druckgradient ist.

[1] *L. Prandtl*, a. a. O.
[2] *H. Reichardt*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940) S. 297.

Eine gewisse experimentelle Bestätigung dafür, daß bei allen praktisch vorkommenden Fällen bis in den rein turbulenten Bereich hinein das Gesetz (1) gilt, ergibt sich aus den Messungen von *Wieghardt*[1] an Reibungsschichten mit verschiedenen Druckgradienten. Es zeigt sich nämlich hierbei, daß bei sämtlichen Geschwindigkeitsprofilen die Geschwindigkeit u in Wandnähe ungefähr proportional $y^{1/7{,}7}$ ist. Das allgemeine Gesetz (1), das bei konstantem Druck gilt, läßt sich nun bekanntlich durch eine Potenzformel

$$\frac{u}{u^*} = C\left(\frac{u^* y}{\nu}\right)^{1/n} \tag{4}$$

annähern[2], wobei n und C Konstanten sind, die noch etwas von dem y^*-Bereich abhängen, in dem unser allgemeines Gesetz (1) möglichst gut angenähert werden soll. In dem für die *Wieghardt*schen Messungen in Frage kommenden Bereich ist n eine Zahl in der Gegend von 7 bis 8.

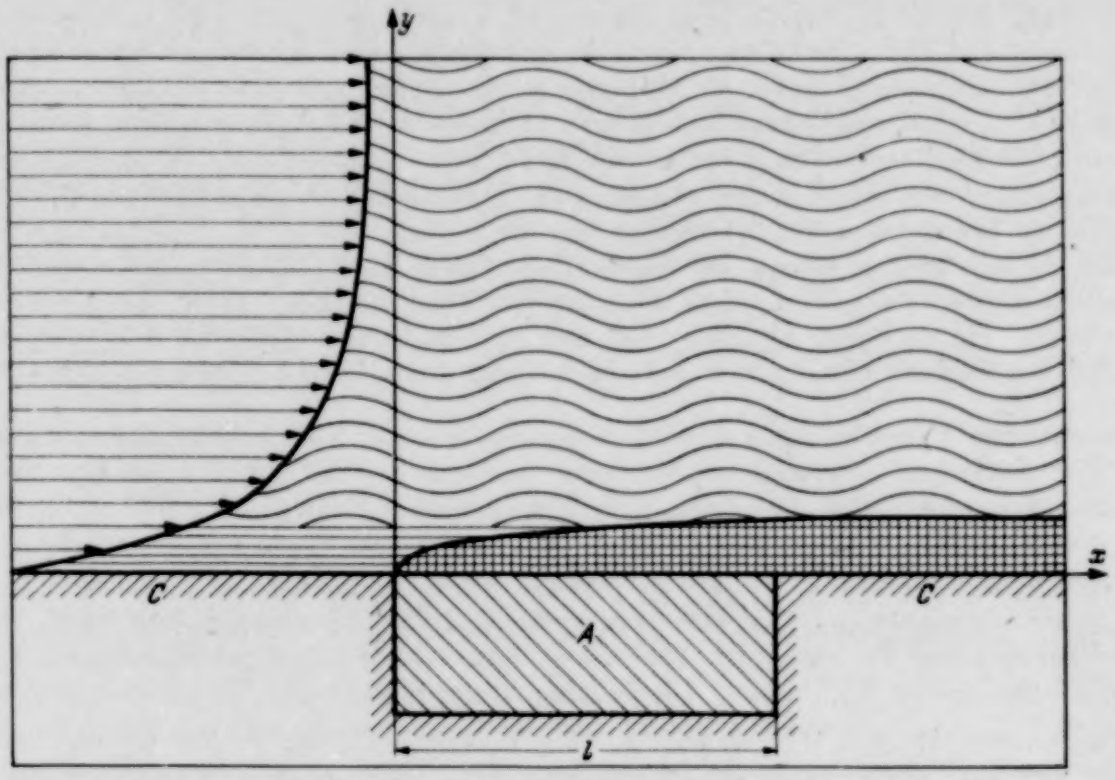

Abb. 1. Schematische Darstellung des Meßverfahrens. Die laminare Unterschicht (geradlinige Stromlinien) und die Wärmegrenzschicht (Kreuzschraffur) sind der Deutlichkeit halber gegenüber dem turbulenten Teil der Reibungsschicht (wellige Stromlinien) erheblich zu dick gezeichnet.

Man kann daher annehmen, daß das Gesetz (1) in diesem wandnahen Gebiet auch bei Druckanstieg oder Druckabfall gültig ist. Doch ist dieser Schluß nicht zwingend, da bei den *Wieghardt*schen Messungen u^* nicht bekannt ist, und man daher in (4) nur die Potenz von y, aber nicht den Zahlenfaktor C prüfen kann. Aber es sei hier auf eine demnächst erscheinende Arbeit von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann* verwiesen, in der gezeigt wird, daß bei den praktisch vorkommenden Druckgradienten das allgemeine Geschwindigkeitsgesetz (4) bzw. (1) den Geschwindigkeitsverlauf sogar bis zu relativ großen Wandabständen recht gut wiedergibt.

Bei Gültigkeit des allgemeinen Geschwindigkeitsgesetzes ist nun aber im Prinzip eine Schubspannungsmessung einfach auszuführen. Man braucht nur in irgendeinem Abstand y die Geschwindigkeit u zu messen und beide Werte in die nach u^* aufgelöste Gleichung (1) einzusetzen. Daraus erhält man dann u^* und damit auch die Wandschubspannung τ_W. Die Schwierigkeit besteht jetzt nur darin, daß man die Geschwindigkeitsmessung in sehr geringem Wandabstand (am besten innerhalb der laminaren Unterschicht) durchführen muß, da man nur dann sicher ist, daß hier das allgemeine Geschwindigkeitsgesetz noch mit der nötigen Strenge gültig ist. Vergegenwärtigt man sich nun die Tatsache, daß die laminare Unterschicht im allgemeinen bei Luftströmungen mit den üblichen Geschwindigkeiten nur einige Hundertstel- bis Zehntelmillimeter stark ist, so sieht man, daß eine solche Geschwindigkeitsmessung mit den üblichen mechanischen Hilfsmitteln (Pitotrohr, Hitzdraht) gar nicht durchführbar ist. Es wurde daher ver-

[1] *K. Wieghardt*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947) S. 146.
[2] *L. Prandtl*, a. a. O.

sucht, den Geschwindigkeitsverlauf in unmittelbarer Wandnähe mittels einer Wärmeübergangsmessung zu erfassen. An Hand der schematischen Skizze Abb. 1 sei das Verfahren erläutert. Längs der festen Wand C ströme eine Flüssigkeit oder ein Gas mit einer turbulenten Reibungsschicht, deren Geschwindigkeitsprofil auf der linken Seite der Abb. 1 gezeigt ist. In Wandnähe haben wir dann die laminare Unterschicht (in Abb. 1 durch gerade Stromlinien angedeutet), während im äußeren Teil die Strömung turbulent ist (durch wellige Stromlinien angedeutet). In die feste Wand C, die wir uns zunächst als wärmeundurchlässig vorstellen wollen, ist nun der kleine, gut wärmeleitende Metallklotz A eingelassen. Durch eine kleine elektrische Heizung wird der Metallklotz A auf eine höhere Temperatur als die Flüssigkeit gebracht, die dieselbe Temperatur wie die Wand C haben soll. Von der Vorderkante des Metallklotzes A beginnend bildet sich dann innerhalb der Strömungsgrenzschicht eine Wärmegrenzschicht (Schicht mit erhöhter Temperatur) aus, die in Abb. 1 durch Kreuzschraffur angedeutet ist. Dadurch daß man die Länge des Klotzes A klein genug macht, kann man nun erreichen, daß die Dicke der Wärmegrenzschicht klein bleibt. Die an die Flüssigkeit abgegebene Wärmemenge ist dann außer durch die Temperatur des Klotzes A und die bekannten Stoffkonstanten des strömenden Mediums nur durch den Geschwindigkeitsverlauf in unmittelbarer Wandnähe festgelegt. Dieser Geschwindigkeitsverlauf hängt aber nach (1) außer von den Stoffkonstanten nur von der Schubspannungsgeschwindigkeit u^* bzw. der Wandschubspannung τ_W ab, so daß wir bei gegebenen Stoffkonstanten und gegebener Temperatur des Klotzes A eine eindeutige Zuordnung von Schubspannung und Wärmeabgabe des Klotzes haben. Die Feststellung dieses Zusammenhanges von Schubspannung und Wärmeabgabe kann dann durch eine Eichmessung bei bekannten Schubspannungen ermittelt werden. Im nächsten Abschnitt soll nun an Hand der Differentialgleichung des Wärmeüberganges der Zusammenhang von Schubspannung und Wärmeübergang untersucht werden.

3. Theoretische Betrachtungen über den Zusammenhang von Schubspannung und Wärmeabgabe. Hier wollen wir zunächst an Hand der Differentialgleichung und der Randbedingungen untersuchen, wie der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Wärmeabgabe unseres Elementes sich möglichst allgemein gültig in dimensionsloser Form schreiben läßt.

Die feste Wand in Abb. 1, die wir als absolut wärmeundurchlässig betrachten wollen, falle mit der x-Achse zusammen. Von $x=0$ bis $x=l$ erstrecke sich der geheizte Klotz A, der eine konstante Temperatur T_W habe. Die Flüssigkeit, soweit sie nicht durch das Element beeinflußt ist, soll die Temperatur T_∞ haben. Die Koordinate senkrecht zur Wand sei mit y bezeichnet.

Wir wollen nun der Einfachheit halber die Annahme machen, daß das Strömungsfeld durch das Temperaturfeld überhaupt nicht beeinflußt werde. Im Prinzip läßt sich dies mit beliebiger Genauigkeit stets dadurch erreichen, daß man $(T_W - T_\infty)$ klein genug wählt.

Die Differentialgleichung für die Wärmeübertragung lautet dann

$$\varrho c_p (\mathfrak{w} \operatorname{grad} T) - \operatorname{div} (\lambda_{eff} \operatorname{grad} T) = 0 . \tag{5}$$

Darin ist $\mathfrak{w}$ der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit mit den Komponenten u und v, und c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck. Für die Wärmeleitung ist hier ein Effektivwert λ_{eff} eingesetzt, da ja durch den turbulenten Austausch außerhalb der laminaren Unterschicht eine scheinbare Erhöhung der Wärmeleitung eintritt; λ_{eff} ist also von y abhängig. Für $\mathfrak{w}$ können wir in unmittelbarer Wandnähe, in der sich ja das ganze Wärmeübertragungsproblem abspielt, unser allgemeines Gesetz (1) einsetzen. Es gilt also

$$u = u^* f(y^*) , \qquad v = 0 . \tag{6}$$

Die Geschwindigkeitskomponente v senkrecht zur Wand können wir hier in unmittelbarer Wandnähe gleich Null setzen, da sich τ_W bzw. u^* und damit auch das Geschwindigkeitsprofil nur sehr langsam ändert. Für den effektiven Wärmeleitungskoeffizienten λ_{eff} folgt nun aus Dimensionsbetrachtungen, daß er sich in der folgenden Form darstellen lassen muß:

$$\lambda_{eff} = \lambda \, g(y^*, Pr) , \tag{7}$$

wobei λ der normale Wärmeleitungskoeffizient, $Pr = \mu c_p/\lambda = \nu/a$ die *Prandtl*sche Zahl, und g eine nicht näher bekannte Funktion ist. Setzen wir (6) und (7) in (5) ein und führen ferner statt x und y die Variabeln

$$\xi = \frac{u^* x}{\sqrt{\nu a}} , \qquad \eta = \frac{u^* y}{\sqrt{\nu a}} = y^* \sqrt{Pr} \tag{8}$$

ein, so erhalten wir

$$\sqrt{Pr}\, f\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}\right)\frac{\partial T}{\partial \xi} - g\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}, Pr\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\right) - \frac{\partial g\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}, Pr\right)}{\partial \eta}\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \qquad (9)$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{lll} \eta = 0, & 0 \leqq \xi \leqq \bar{l}: & T = T_W, \\ \eta = 0, & -\infty \leqq \xi \leqq 0, \quad \bar{l} \leqq \xi \leqq +\infty: & \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = 0, \\ \eta = \infty: & & T = T_\infty. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

wobei zur Abkürzung $l u^*/\sqrt{\nu a} = \bar{l}$ gesetzt ist. Aus der Homogenität dieser Differentialgleichung in T, der Form der Koeffizienten und der Form der Randbedingungen folgt, daß das Temperaturfeld sich in der folgenden Form darstellen läßt:

$$T = T_\infty + (T_W - T_\infty)\, h(\xi, \eta, Pr, \bar{l}). \qquad (11)$$

Da nun direkt an der Wand die Wärme nur durch Wärmeleitung abgegeben wird, folgt hieraus die in der Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge

$$Q = b\lambda \int_0^l \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} dx = b\lambda \int_0^{\bar{l}} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} d\xi = b\lambda (T_W - T_\infty)\, k(\bar{l}, Pr), \qquad (12)$$

wobei b die Breite des Elementes und k eine nicht näher bekannte Funktion ist. Führen wir noch die mittlere Wärmeübergangszahl

$$\bar{\alpha} = \frac{Q}{l b (T_W - T_\infty)} \qquad (13)$$

und die zugehörige dimensionslose Wärmeübergangszahl, die sogenannte *Nusselt*sche Zahl $\overline{Nu} = \bar{\alpha}\, l/\lambda$ ein, so gilt

$$\overline{Nu} = k(\bar{l}, Pr). \qquad (14)$$

Wir sehen also, daß unter Voraussetzung einer konstanten *Prandtl*schen Zahl, ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Größe

$$\bar{l} = \frac{u^* l}{\sqrt{\nu a}} = \left(\frac{l^2 \tau_W}{\mu a}\right)^{1/2}$$

und der *Nusselt*schen Zahl besteht. Durch Messung von Q und $(T_W - T_\infty)$ kann man $\overline{Nu}$ bestimmen und daraus $\bar{l}$ bzw. u^* bzw. τ_W berechnen, wenn die Funktion k bekannt ist. Im Prinzip könnten wir nun unsere Funktion k, d. h. den Zusammenhang von $\overline{Nu}$, $\bar{l}$ und Pr durch Integration unserer Differentialgleichung (9) bestimmen, wobei wir nur irgendwelche Annahmen machen müßten, die den Verlauf der Funktion $g(y^*, Pr)$ festlegen. Wegen der Unsicherheit dieser Annahmen und aus dem Grunde, daß wir beim Bau eines Meßelementes doch die der Rechnung zugrunde gelegten Idealisierungen nicht einhalten können, lohnt diese komplizierte Rechnung nicht. Wir ermitteln daher den Zusammenhang von $\overline{Nu}$ und $\bar{l}$ besser durch eine Eichmessung. Diese Eichmessung braucht an sich nicht mit dem gleichen strömenden Medium ausgeführt zu werden, für das man später das Meßelement verwenden will; doch müssen beide Medien die gleiche *Prandtl*-Zahl haben.

Wählt man die Länge l bzw. $\bar{l}$ so klein, daß die Wärmegrenzschicht ganz innerhalb der laminaren Unterschicht bleibt, so vereinfachen sich die theoretischen Zusammenhänge erheblich. In (9) können wir dann nach (3)

$$f\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}\right) = \frac{\eta}{\sqrt{Pr}}$$

setzen. Da hier ferner der turbulente Austausch fehlt, ist

$$g\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}, Pr\right) = 1 \qquad \frac{\partial g\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}, Pr\right)}{\partial \eta} = 0. \qquad (15)$$

Damit folgt aus (9)

$$\eta \frac{\partial T}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\right) = 0 \qquad (16)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0\,, \qquad 0 \leqq \xi \leqq \bar{l}: && T = T_W\,, \\ &\eta = 0\,, \quad -\infty \leqq \xi \leqq 0\,, \quad \bar{l} \leqq \xi \leqq +\infty: && \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0\,, \\ &\eta = \infty: && T = T_\infty\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Es bleibt also $\bar{l}$ (dimensionslose Elementtiefe) der einzige Parameter der Lösung im (ξ,η)-System. Für nicht zu kleine Werte von $\bar{l}$ wird die Dicke der Wärmegrenzschicht klein gegenüber ihrer Länge. Der gesamte vordere Teil der Wärmegrenzschicht bis zu ξ-Werten, die annähernd gleich $\bar{l}$ sind, ist dann gänzlich unabhängig von $\bar{l}$. Daher können wir in guter Näherung einfach die Differentialgleichung (16) für die Randbedingungen

$$\begin{aligned} T &= T_W \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \infty \quad \text{und} \quad \eta = 0\,, \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{für} \quad -\infty \leqq \xi \leqq 0 \quad \text{und} \quad \eta = 0 \end{aligned}$$

lösen und haben dann im Bereich $0 \leqq \xi \leqq \bar{l}$ gleichzeitig die richtige Lösung für die richtigen Randbedingungen.

In der Differentialgleichung können wir für hinreichend große ξ-Werte die übliche Vernachlässigung der Grenzschichttheorie $\partial^2 T/\partial \xi^2 \ll \partial^2 T/\partial \eta^2$ machen und kommen auf die Differentialgleichung

$$\eta \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = 0\,. \tag{18}$$

Diese partielle Differentialgleichung wurde bereits von *Lévêque* [1] durch die Substitution

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{(9\,\xi)^{1/3}} \tag{19}$$

in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$3\,\bar{\eta}^2 \frac{dT}{d\bar{\eta}} + \frac{d^2 T}{d\bar{\eta}^2} = 0 \tag{20}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} T &= T_W \quad \text{für} \quad \bar{\eta} = 0\,, \\ T &= T_\infty \quad \text{für} \quad \bar{\eta} = \infty \end{aligned}$$

übergeführt und gelöst. Es ergibt sich dabei das folgende Temperaturfeld:

$$T = T_W - (T_W - T_\infty)\, F(\bar{\eta}) \tag{21}$$

mit

$$F(\bar{\eta}) = \frac{\int_0^{\bar{\eta}} e^{-\bar{\eta}^3}\, d\bar{\eta}}{\int_0^{\infty} e^{-\bar{\eta}^3}\, d\bar{\eta}}\,. \tag{22}$$

Die Temperatur hängt also nur von dem Parameter $\bar{\eta}$ ab; das bedeutet: wir haben in Schnitten $\xi = \text{konst.}$ ähnliche Temperaturprofile, deren Dicke mit $\xi^{1/3}$ zunimmt. Berechnet man nun hieraus die abgegebene Wärmemenge Q, daraus die *Nusselt*sche Zahl $\overline{Nu}$ als Funktion von $\bar{l}$, so ergibt sich

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha}\, l}{\lambda} = \frac{(9\bar{l})^{2/3}}{6\int_0^{\infty} e^{-\bar{\eta}^3}\, d\bar{\eta}} = 0{,}807\, \bar{l}^{2/3} \tag{23}$$

oder, indem wir für $\bar{l}$ wieder die ursprünglichen Größen einführen

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha}\, l}{\lambda} = 0{,}807 \left(\frac{l^2}{\mu\, a}\right)^{1/3} \tau_W^{1/3}\,. \tag{24}$$

Die *Nusselt*sche Zahl $\overline{Nu}$ und die Wärmeübergangszahl $\bar{\alpha}$ sind in diesem Falle also der dritten Wurzel aus der Wandschubspannung proportional[2]. Die Abhängigkeit der *Nusselt*schen Zahl $\overline{Nu}$ von der *Prandtl*schen Zahl Pr fällt unter der Voraussetzung, daß die Wärmegrenzschicht innerhalb der laminaren Unterschicht bleibt, ganz heraus.

[1] *M. A. Lévêque*, Ann. mines 13 (1928) S. 283.

[2] Unabhängig hiervon ist diese Beziehung bereits von *H. Reichardt* abgeleitet worden. (Noch unveröffentlicht.)

In Abb. 2 ist das Temperaturprofil $(T_W - T)/(T_W - T_\infty) = F(\bar{\eta})$ nach (22) über $\bar{\eta}$ aufgetragen. Definiert man als Dicke der Wärmegrenzschicht den Wandabstand, in dem sich die Tangente an das Temperaturprofil im Punkt $\bar{\eta} = 0$ und die Asymptote an das Temperaturprofil schneiden (Abb. 2), so ergibt sich als Dicke der Wärmegrenzschicht

$$\delta_W = 1{,}86 \left(\frac{a \mu x}{\tau_W} \right)^{1/3}. \tag{25}$$

Die Dicke der laminaren Unterschicht ist nach den Ausführungen in Abschnitt 2 durch die folgende Beziehung gegeben:

$$\frac{u^* \delta_L}{\nu} = C, \tag{26}$$

wobei C eine Konstante ist, die je nach den Anforderungen, die an die Laminarität gestellt werden, im Bereich von 1,5 bis 10 liegt. Aus (25) und (26) folgt das Verhältnis

$$\frac{\delta_W}{\delta_L} = \frac{1{,}86}{C} \left(\frac{c'_f}{2} \right)^{1/6} \left(\frac{Re_l}{Pr} \right)^{1/3}. \tag{27}$$

Hierin ist $c'_f = 2 \tau_W / \varrho U^2$ der örtliche Reibungsbeiwert, d. h. die mit dem Staudruck außerhalb der Reibungsschicht dimensionslos gemachte Wandschubspannung τ_W. Dabei ist Re_l die aus der Elementtiefe l, der Geschwindigkeit außerhalb der Reibungsschicht U und der kinematischen Zähigkeit ν gebildete *Reynolds*sche Zahl und Pr die *Prandtl*sche Zahl. Da c'_f sich im allgemeinen nur wenig ändert (es liegt normalerweise im Bereich von 0,002 bis 0,003), ist $(c'_f/2)^{1/6}$ auch praktisch eine Konstante.

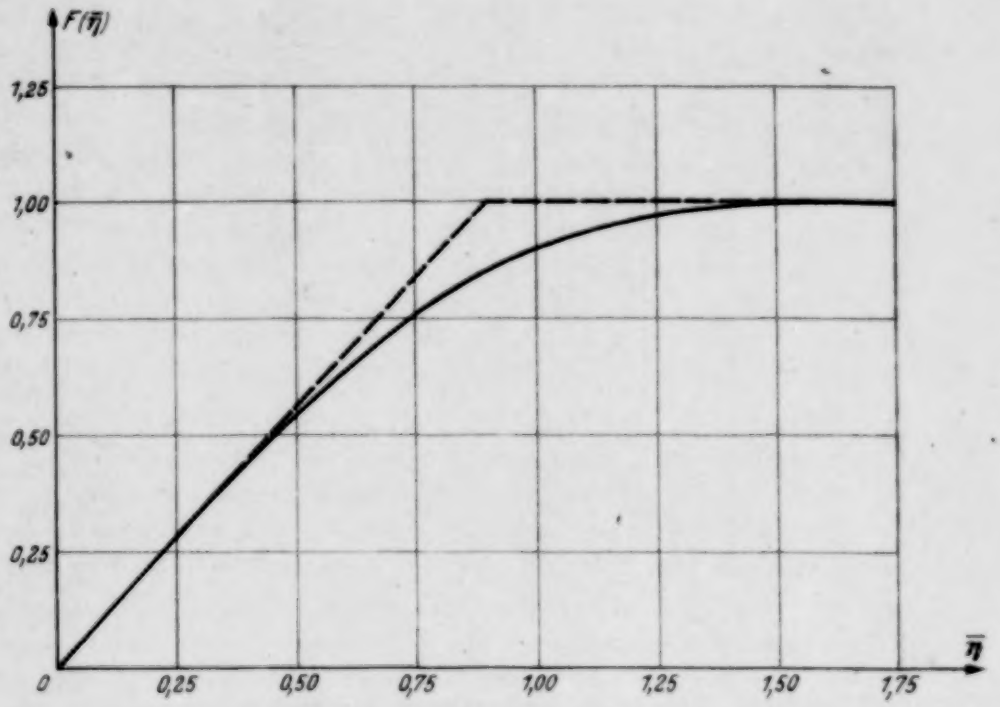

Abb. 2. Temperaturprofil der Wärmegrenzschicht für den Fall, daß die Wärmegrenzschicht ganz innerhalb der laminaren Unterschicht bleibt [nach (22)]; Definition der Dicke der Wärmegrenzschicht.

Setzt man nun in (27) die Stoffkonstanten für Luft, die bei Luft üblicherweise vorkommenden Geschwindigkeiten und die praktisch ausführbare Elementlänge l von etwa 1 mm ein, so sieht man, daß die Wärmegrenzschicht im allgemeinen etwas aus der laminaren Unterschicht herausragt. Trotzdem ist zu erwarten, daß besonders bei Verwendung kleiner Elementtiefen l das Gesetz (23) bzw. (24) noch näherungsweise den Zusammenhang zwischen Wärmeübertragung und Schubspannung wiedergibt, da ja nur in den äußeren Gebieten der Wärmegrenzschicht, wo der Temperaturgradient sowieso nur gering ist, der Wärmeübergang durch die Turbulenz geändert wird. Außerdem treten hier zwei sich zum Teil kompensierende Einflüsse auf. Einmal wird nämlich durch den turbulenten Austausch der Wärmeübergang erhöht, zum anderen wird durch den Impulsaustausch die mittlere Strömungsgeschwindigkeit vermindert, was einer Verminderung des Wärmeüberganges entspricht.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß durch dieses Eintauchen der Wärmegrenzschicht in den turbulenten Teil die Eindeutigkeit des Zusammenhanges von Wärmeübergang und Schubspannung in keiner Weise beeinträchtigt wird. Nur die Form von (23) bzw. (24) kann hierdurch geändert werden, was auf unsere Messung keinen Einfluß hat, da wir den Zusammenhang zwischen Schubspannung und Wärmeübergang sowieso durch eine Eichmessung bestimmen wollen.

Bei der Ableitung von (24) haben wir außer der Voraussetzung, daß die Wärmegrenzschicht ganz innerhalb der laminaren Unterschicht bleibt, noch die Annahme $\partial^2 T/\partial \xi^2 \ll \partial^2 T/\partial \eta^2$ gemacht. Für größere ξ ist diese Annahme sicher gerechtfertigt, während für sehr kleine ξ-Werte ganz nahe der Vorderkante des Elementes $\partial^2 T/\partial \xi^2$ nicht mehr vernachlässigbar gegen $\partial^2 T/\partial \eta^2$

bleibt. Durch ein Iterationsverfahren, bei dem man für $\partial^2 T/\partial \xi^2$ den Wert aus der *Lévêque*schen Lösung als erste Näherung einsetzt, kann man sich jedoch leicht überzeugen, daß wesentliche Änderungen des Wärmeüberganges erst bei ξ-Werten eintreten, die kleiner als 5 sind. Ist daher $\bar{l}$ erheblich größer als 5, was bei Luftströmungen mit den üblichen Geschwindigkeiten der Fall ist, so spielt die Vernachlässigung des Gliedes $\partial^2 T/\partial \xi^2$ keine wesentliche Rolle mehr. Wir haben daher bei unseren Versuchen, die wir in Luft durchführen wollen, nach (24) zu erwarten, daß die dritte Wurzel aus der Schubspannung ungefähr der Wärmeübergangszahl proportional ist. Selbstverständlich bleibt aber auch bei sehr kleinen $\bar{l}$-Werten, bei denen die Vernachlässigung des Gliedes $\partial^2 T/\partial \xi^2$ nicht mehr zulässig ist, der Zusammenhang zwischen Wärmeübergang und Schubspannung eindeutig.

4. Technische Ausführung des Schubspannungsmeßgerätes. In Abb. 3 ist nun ein Schubspannungsmeßgerät dargestellt, das sich bei den im nächsten Abschnitt beschriebenen Messungen als sehr brauchbar für die Wandschubspannungsmessung in Luft erwiesen hat. An Hand dieser Abbildung wollen wir den Aufbau und die Wirkungsweise des Gerätes schildern. In die glatte Wand *C*, an der die Wandschubspannung der vorbeiströmenden Luft gemessen werden soll, ist der stählerne Ring *D* eingesetzt und fest verschraubt. Wesentlich ist hierbei, daß *D* mit der Wand *C* möglichst gut wärmeleitend verbunden ist (große Berührungsfläche), damit die von unserem Meßelement wegen der nicht vollkommenen Wärmeisolierung direkt zur Wand abfließende Wärmemenge keine Aufheizung des Ringes *D* hervorruft. In die Bohrung dieses Ringes *D* wird nun möglichst gut passend unser Meßelement eingesetzt und mit der Überwurfmutter *F* aus Hartgummi gehalten. Um nicht für jede Meßstelle ein Meßgerät nötig zu haben, kann man es durch einen Blindstöpsel ersetzen, der die Bohrung des Ringes genau ausfüllt. Dabei müssen selbstverständlich alle Teile so eingepaßt werden, daß an den Trennflächen keine Stoßkanten entstehen, die das Grenzschichtprofil der Strömung stören würden.

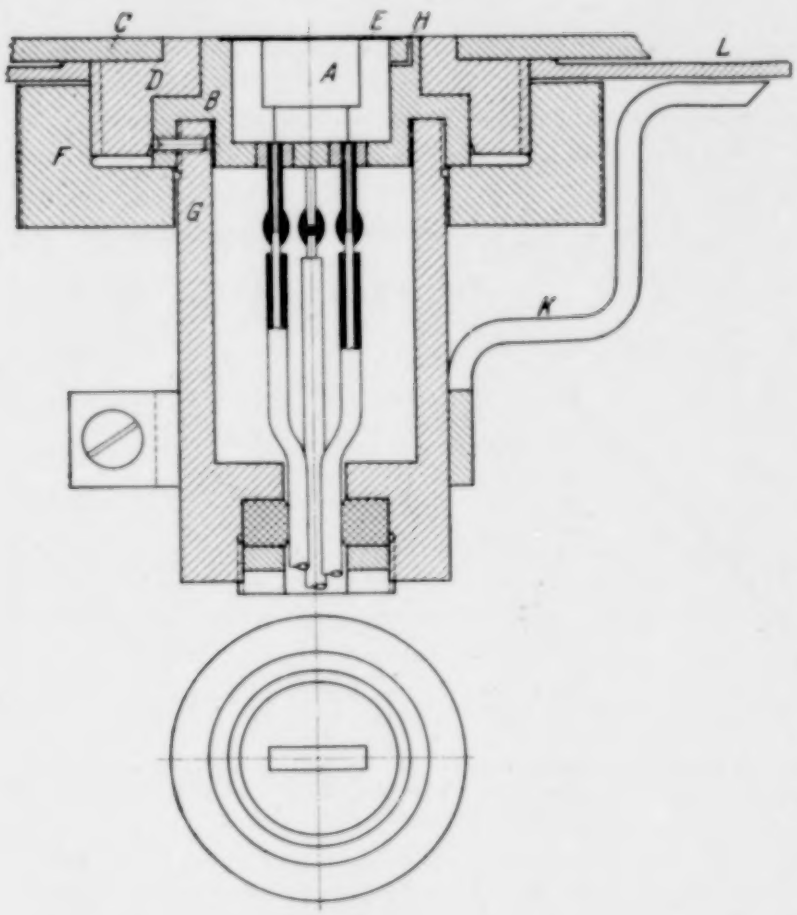

Abb. 3. Ausgeführtes Element zur Messung der Wandschubspannung.

Das Meßgerät besteht aus dem Gehäuse *B* aus Messing, in dessen Bohrung sich das kupferne Klötzchen *A* mit den Abmessungen $2 \times 9 \times 6$ mm befindet. Dieses Klötzchen wird durch eine an die 2×9 mm große Fläche angekittete Zelluloidmembran *E* von ungefähr $^1/_{10}$ mm Dicke gehalten, die möglichst wellenfrei über die Öffnung des Gehäuses gekittet ist. Um eine Wölbung der Membran durch einen Druckunterschied zwischen Innen- und Außenraum zu vermeiden, ist in die Wand des Gehäuses noch die Druckausgleichsbohrung *H* angebracht. An der Auflagestelle der Membran befindet sich eine ungefähr $^1/_{10}$ mm tiefe Eindrehung im Gehäuse *B*, um eine möglichst glatte Oberfläche zu erhalten. Durch diese Art der Befestigung des Klötzchens *A* hat man nun eine gute Wärmeisolation gegenüber dem Gehäuse *B* erreicht; denn bei den kleinen Abmessungen der Bohrung im Gehäuse *B*, bei denen die Konvektion zur Wärmeübertragung nicht wesentlich beiträgt, ist Luft ein ausgezeichneter Wärmeisolator. Durch die Membran selbst kann wegen ihrer geringen Dicke und kleinen Wärmeleitfähigkeit ebenfalls keine große Wärmemenge an das Gehäuse *B* abfließen. Die Wärmeübertragung von dem Klötzchen *A* an die strömende Luft wird dagegen durch die Zelluloidmembran wegen ihrer geringen Dicke nur wenig beeinflußt. Im Klötzchen *A* befindet sich nun eine kleine elektrische Heizung von ungefähr 0,13 Watt.

Außerdem kann man mit einem Thermoelement, dessen Lötstelle sich in der Nähe der wärmeabgebenden Oberfläche befindet, die Temperatur des Kupferklötzchens messen. Die vier ungefähr $^1/_{10}$ mm starken Drähte sind isoliert durch den Boden des Gehäuses B geführt. Hinter dem Boden gehen die Drähte dann auf einen stärkeren Querschnitt über. Die Anschlußstellen dieser Drähte sind durch die Kappe G geführt, welche aus gut wärmeisolierendem Hartgummi hergestellt ist, um zu vermeiden, daß beim Auswechseln des Gerätes durch die Handwärme das Gehäuse B aufgeheizt wird. An dem Gehäuse B befindet sich noch ein Zeiger K, der sich über der am Ring D befindlichen Scheibe L bewegt, die mit einer Winkelteilung versehen ist. Dadurch kann man von außen die Richtung ablesen, unter der das Klötzchen A eingebaut ist.

5. Durchführung von Schubspannungsmessungen und Ermittlung der Eichkurve. Nach Abschnitt **3** besteht ein eindeutiger Zusammenhang von $\overline{Nu}$ und $\bar{l}=(l^2\tau_W/\mu a)^{1/3}$, wenn die *Prandtl*sche Zahl Pr gegeben ist. Wie in Abschnitt 3 bereits angedeutet, soll die genaue Form des Zusammenhanges für unser Meßelement durch eine Eichmessung bestimmt werden. Wir wollen nun zuerst sehen, wie wir mit unserem Gerät die Größe $\bar{\alpha}$ bzw. $\overline{Nu}$ messen können. Hierzu müssen wir die in der Zeiteinheit von unserem Element A abgegebene Wärmemenge Q und die Temperaturdifferenz (T_W-T_∞) messen. Die Wärmemenge Q läßt sich einfach dadurch messen, daß man dem Klötzchen A eine bestimmte elektrische Spannung und damit auch Heizleistung zuführt und so lange wartet, bis sich der stationäre Zustand eingestellt hat; denn dann muß ja die abgegebene Wärmemenge gleich der zugeführten Heizleistung sein, die man bequem messen kann. Die Temperaturdifferenz (T_W-T_∞) bestimmt man am einfachsten, indem man ein zweites Meßelement, das in die gleiche Wand eingebaut ist, bei nicht eingeschalteter Heizung als kalte Lötstelle des Thermoelementes verwendet. Die auftretende Thermospannung, die zu (T_W-T_∞) proportional ist, kann man dann entweder mit einem Kompensationsgerät oder einem empfindlichen Galvanometer messen. Im zweiten Fall muß man im allgemeinen den durch den endlichen Widerstand der Zuleitungen hervorgerufenen Spannungsabfall berücksichtigen. Aus Q und (T_W-T_∞) kann man dann $\bar{\alpha}$ bzw. $\overline{Nu}$ berechnen.

Hier ist jetzt aber zu beachten, daß die von dem Klötzchen A abgegebene Wärmemenge aus zwei Anteilen besteht, einmal aus derjenigen Wärmemenge, die von dem Klötzchen direkt an das strömende Medium abgegeben wird, und zweitens aus der Wärmemenge, die wegen der nichtvollkommenen Wärmeisolierung des Klötzchens A an die Wand C abfließt. Unsere eben angegebene Bestimmung von $\bar{\alpha}$ bzw. $\overline{Nu}$ schließt beide Anteile ein, während unsere theoretischen Betrachtungen in Abschnitt **3** sich nur auf den ersten Anteil bezogen. Da jedoch der zweite Anteil nur von dem Gerät selbst abhängt und von der übertragenen Wandschubspannung unabhängig ist, wird hierdurch nur eine Parallelverschiebung der Eichkurve hervorgerufen.

Um nun für die Eichmessungen eine bekannte Schubspannung zu haben, wurde das zu eichende Gerät in die von *Schultz-Grunow*[1] beschriebenen rechteckige Meßstrecke in eine glatte ebene Wand aus Stahlblech eingebaut, die eine Länge von 6 m und eine Breite von 1,4 m hat. Die gegenüberliegende verstellbare Wand wurde so eingestellt, daß sich längs der ganzen Meßstrecke ein konstanter Druck ergab. An der Meßwand bildet sich dann eine Reibungsschicht, wie an einer frei, in Längsrichtung angeströmten, unendlich dünnen ebenen Platte aus. Die Reibungsbeiwerte und damit die Schubspannungen für diesen Fall sind nun aber von verschiedenen Autoren[2 3 4 5] nach verschiedenen Methoden bestimmt und daher ziemlich genau bekannt. Wir haben für unsere Eichmessungen die Ergebnisse der *Schultz-Grunow*schen Messung benutzt, da sie in der gleichen Meßstrecke durch direkte Kraftmessungen gewonnen wurden und daher irgendwelche Unvollkommenheiten in der Versuchsanordnung in unsere Eichmessungen nicht eingehen. Nach den Überlegungen im Abschnitt **3** waren unter der Voraussetzung einer festen *Prandtl*-Zahl $\overline{Nu}$ eine eindeutige Funktion von $\bar{l}$. Die Ableitung war aber unter der Voraussetzung erfolgt, daß die Temperaturerhöhung (T_W-T_∞) so klein sei, daß die Stoffkonstanten innerhalb der Wärmegrenzschicht noch als konstant betrachtet werden konnten. Aus meßtechnischen Gründen kann man die Temperaturdifferenz (T_W-T_∞) nicht so klein machen, daß diese Voraussetzung streng

[1] a. a. O.
[2] *J. Nikuradse*, Turbulente Reibungsschichten an der Platte. Z. W. B. 1942.
[3] *L. Prandtl*, Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten. Ergebnise d. AVA. Göttingen, IV. Lieferung (1932) S. 18.
[4] *K. E. Schönherr*, Trans. Soc. Nav. Arch. and Marine Eng. Vol. 40 (1932).
[5] Vgl. auch *F. Schultz-Grunow*, a. a. O.

zutrifft. Aus diesem Grunde ist der Zusammenhang von $\overline{Nu}$ und $\bar{l}$ etwas verschieden, je nachdem welche Temperaturdifferenz $(T_W - T_\infty)$ wir wählen. Außerdem hängt er etwas davon ab, ob wir mit dem der Temperatur T_∞ oder mit dem der Temperatur T_W zugeordneten Stoffkonstanten unsere dimensionslosen Größen $\overline{Nu}$ und $\bar{l}$ bilden. Diese Schwierigkeiten können wir dadurch beheben, daß wir verabreden, stets mit den der Temperatur T_∞ zugeordneten Stoffgrößen dimensionslos zu machen und außerdem stets mit der gleichen Temperaturdifferenz $(T_W - T_\infty)$ zu arbeiten. Die zweite Forderung ersetzen wir aber aus meßtechnischen Gründen durch die Forderung stets mit der gleichen Heizleistung zu arbeiten. Wir erreichen dadurch ebenfalls eine Eindeutigkeit des Zusammenhanges von $\overline{Nu}$ und $\bar{l}$. Die Einstellung der festen Heizleistung ist aber erheblich bequemer als die Einstellung der festen Temperatur T_W, da man im zweiten Fall erst jedesmal den sich nur langsam einstellenden stationären Zustand abwarten muß, ehe man eine Verstellung vornehmen kann. Als Eichkurve ist nun $\bar{l}^{2/3}$ als Abszisse über $\overline{Nu}$ als Ordinate aufgetragen. Unter der Voraussetzung, daß die Wärmegrenzschicht nicht

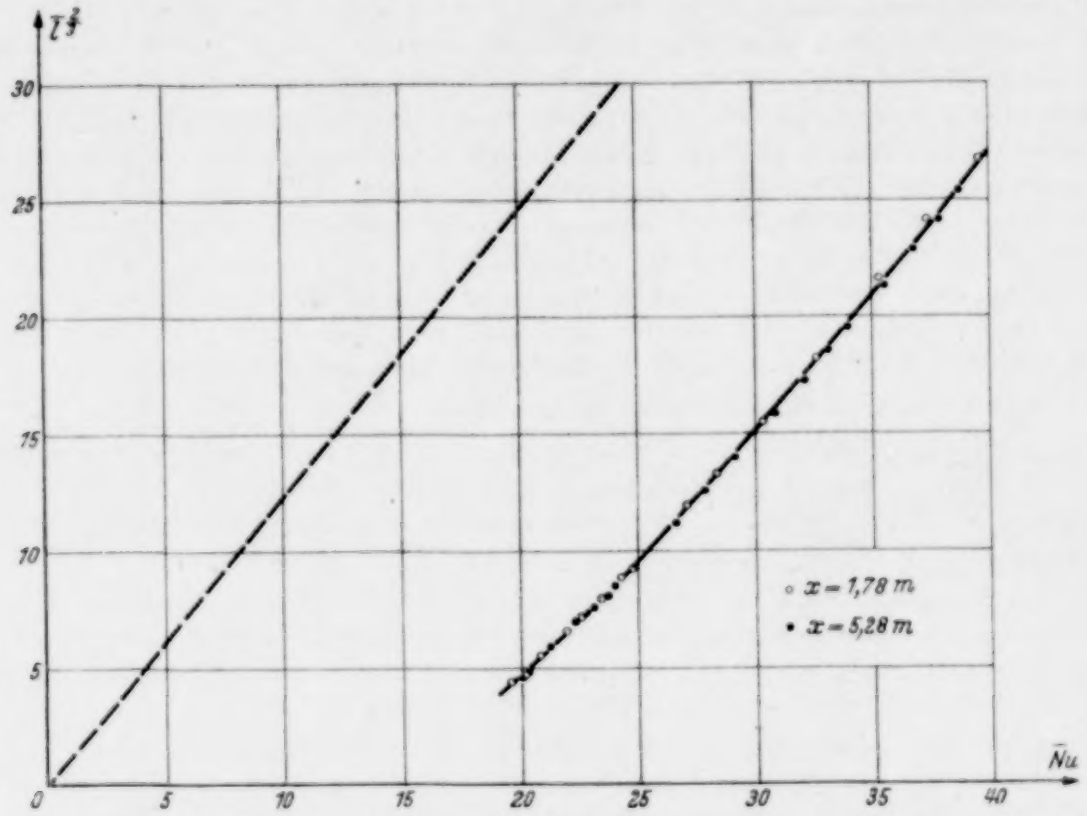

Abb. 4. Eichkurve für das Element nach Abb. 3. Gestrichelt ist der theoretische Verlauf nach (23) eingetragen. Die starke Parallelverschiebung zwischen den beiden Kurven rührt daher, daß bei der theoretischen Kurve der direkte Abfluß der Wärme an die Wand nicht berücksichtigt ist.

wesentlich aus der laminaren Unterschicht herausragt, haben wir dann nach (23) näherungsweise eine Gerade als Eichkurve zu erwarten, die aber wegen der über die nicht vollkommene Wärmeisolierung an die Wand abfließende Wärmemenge nicht durch den Koordinatenanfangspunkt geht. In Abb. 4 ist für unser Gerät die Eichkurve gezeigt. Wir erkennen den annähernd geradlinigen Verlauf der Eichkurve über einen großen $\bar{l}$-Bereich (dem vermessenen $\bar{l}$-Bereich entspricht ein Schubspannungsbereich von 1:223). Die Krümmung der Eichkurve ist hier im wesentlichen dadurch bedingt, daß sich zwischen der Oberfläche des Kupferklötzchens und der strömenden Luft noch die Zelluloidmembran befand. Messungen mit anderen Meßelementen, die anstatt der Zelluloidmembran eine Glasmembran (höhere Wärmeleitung) hatten, zeigten noch erheblich geradere Eichkurven, doch war die Wärmeisolierung gegenüber dem Gehäuse schlechter. Die Gerade, die wir nach (23) zu erwarten haben, ist in Abb. 4 gestrichelt eingetragen. Die Änderung der Schubspannung bzw. der Größe $\bar{l}$ wurde einmal durch Verändern der Strömungsgeschwindigkeit und zum anderen durch Verschieben der Einbaustelle des Gerätes an der Meßplatte erreicht. Das Gerät wurde dazu in zwei verschiedenen Lagen eingebaut, einmal 1,78 m von der Vorderkante der Meßwand, und das andere Mal 5,28 m von der Vorder-

kante der Meßwand. In beiden Fällen wurde der gesamte Geschwindigkeitsbereich durchfahren. Wir erkennen, daß die Punkte beider Meßreihen gut zusammenfallen. Der kleine systematische Unterschied zwischen den beiden Meßreihen braucht nicht auf das Gerät zurückgeführt zu werden, da er nicht größer ist als die Meßgenauigkeit, der der Eichung zugrunde gelegten *Schultz-Grunow*schen Messungen. Nach den theoretischen Betrachtungen in Abschnitt **3** wäre es möglich, die Eichmessungen mit einem anderen strömenden Medium als die Hauptmessungen durchzuführen, soweit nur in beiden Fällen die *Prandtl*sche Zahl gleich ist. Bei Berücksichtigung der nicht vollkommenen Wärmeisolierung des Klötzchens *A* ist dies nicht mehr möglich, wie man durch folgende Überlegung leicht einsieht.

Bei gegebener Größe $\bar{I}$ ist zwar die *Nusselt*sche Zahl, die der direkt an das strömende Medium abgegebenen Wärme entspricht, festgelegt. Die *Nusselt*sche Zahl, die der direkt an die Wand abgegebenen Wärme entspricht, ist bei verschiedenen strömenden Medien aber etwas verschieden, da nicht alle Wärme über den in die Kammer des Gehäuses eingeschlossenen Stoff abfließt, sondern ein Teil direkt über die Zelluloidmembran bzw. die Heiz- und Thermo-Elementendrähte abfließt.

Man verwendet daher bei Eich- und Hauptmessungen möglichst das gleiche Medium und führt die Messungen auch möglichst bei gleichen Temperaturen durch, da verschiedenen Temperaturen ja auch verschiedene Stoffkonstanten des Mediums entsprechen und daher der gleiche Effekt auftritt. Dieser Temperatureffekt ist aber nur gering, so daß Temperaturschwankungen von $\pm 5^0$ C kaum einen meßbaren Einfluß geben. Will man bei höheren Temperaturschwankungen messen, so muß man die Abhängigkeit der Eichkurve von der Temperatur besonders ermitteln.

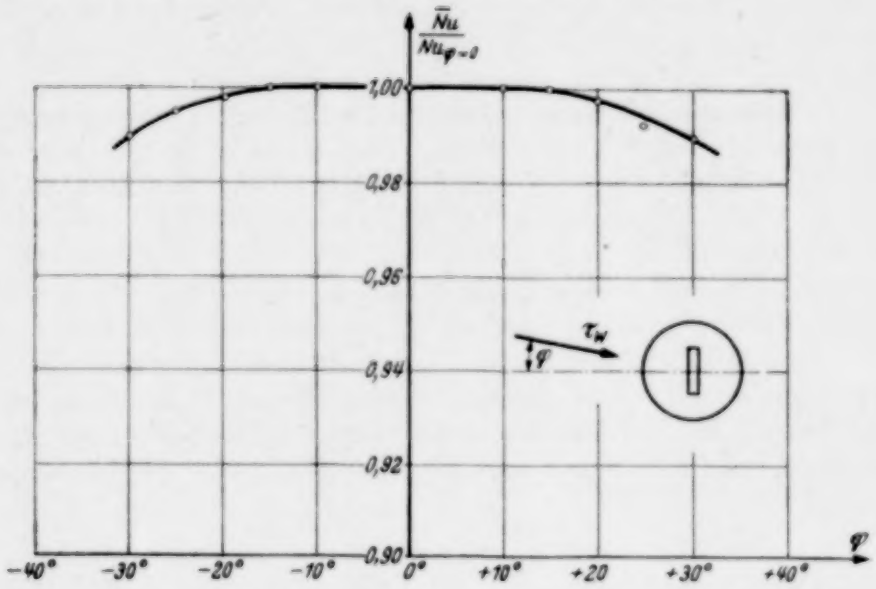

Abb. 5. Richtungsempfindlichkeit bei Anströmung parallel zur schmalen Seite des wärmeabgebenden Rechtecks.

6. Richtungsempfindlichkeit des Meßgerätes und Messung der Richtung der Schubspannung. Die von dem strömenden Medium auf die Wand übertragene Schubspannung ist eine vektorielle Größe. Zu ihrer genauen Bestimmung ist also die Angabe ihrer absoluten Größe und ihrer Richtung erforderlich. In vielen Fällen ist die Richtung nun von vornherein durch die Richtung der Strömung außerhalb der Reibungsschicht gegeben; nämlich immer dann, wenn kein Druckgefälle senkrecht zur Strömungsrichtung vorhanden ist, da sich dann in der Reibungsschicht eine ebene Strömung ausbildet. In diesen Fällen interessiert man sich also nur für die Größe der Schubspannung. Das Gerät wird dann so eingebaut, daß die schmale Seite der Oberfläche des Klötzchens parallel zur Richtung der Schubspannung ist. Hierbei ist es wünschenswert, daß das Gerät eine geringe Richtungsempfindlichkeit hat, damit kleine Winkelfehler beim Einbau des Gerätes nicht zu Fehlmessungen führen. In Abb. 5 ist über den Winkel φ (Winkel zwischen Schubspannung und Richtung der kleinen Seite der Oberfläche des Klötzchens *A*) die gemessene *Nusselt*sche Zahl $\overline{Nu}$ dividiert durch die *Nusselt*sche Zahl $\overline{Nu}_{\varphi=0}$ beim Winkel $\varphi=0$ aufgetragen. Wir erkennen die sehr gute Richtungsunempfindlichkeit der Sonde. Bis zu Winkeln von $\pm 15^0$ ist überhaupt kein Fehler vorhanden, und auch bei größerem Winkel ist er nur sehr gering.

Es treten nun aber auch häufig Strömungen auf, bei denen ein Druckgefälle senkrecht zur Strömung vorhanden ist. Dann hat die Strömung innerhalb der Grenzschicht in verschiedenen Wandabständen verschiedene Richtung. Die Richtung der Schubspannung ist dabei durch die Richtung der Strömung in unmittelbarer Wandnähe bestimmt. Hier ist also die Richtung der Schubspannung von vornherein nicht gegeben, und sie muß ebenfalls durch Messung ermittelt werden. Hierzu können wir jetzt das gleiche Gerät benutzen, das wir nun so einbauen, daß die

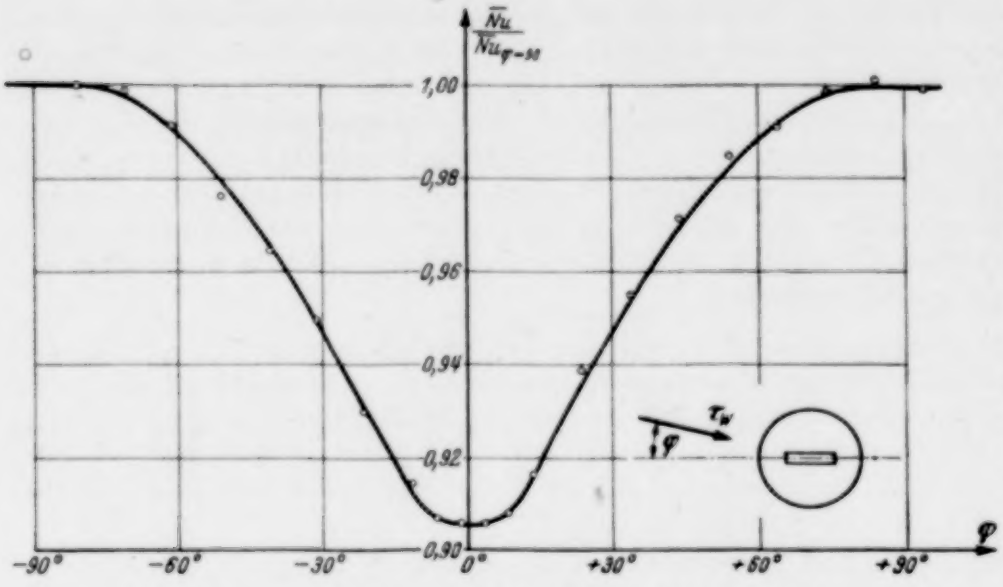

Abb. 6. Richtungsempfindlichkeit bei Anströmung parallel zur langen Seite des wärmeabgebenden Rechtecks.

Richtung der Schubspannung ungefähr parallel der langen Seite der Oberfläche des Klötzchens *A* ist. Durch Messen des Wärmeüberganges erhält man die in Abb. 6 angegebene Richtungsabhängigkeit der *Nusselt*schen Zahl, die ein ausgeprägtes Minimum hat, wenn die Schubspannung parallel der langen Seite des Klötzchens *A* ist. Durch Messen von 3 oder 4 Punkten auf jeder Seite des Minimums läßt sich dieses und damit die Richtung der Schubspannung ziemlich genau ermitteln.

7. Zusammenfassung. Zuerst wird gezeigt, daß bei einer turbulenten Reibungsschicht an einer glatten Wand auch bei Druckanstieg und Druckabfall das Geschwindigkeitsprofil in unmittelbarer Wandnähe außer von den Stoffkonstanten des strömenden Mediums nur von der an die Wand übertragenen Schubspannung abhängt. Daher ist die Wärmeabgabe eines kleinen, in die Wand eingebauten Elementes mit höherer Temperatur als die des strömenden Mediums ein Maß für die übertragene Wandschubspannung. Theoretische Betrachtungen über die Zusammenhänge ergeben, daß es möglich ist, bei Einhaltung bestimmter konstruktiv geeigneter Abmessungen die Wandschubspannung der Reibungsschicht mittels einer Wärmeübergangsmessung an einem in die Wand eingebauten Meßelement zu ermitteln. Ein solches Meßgerät wird beschrieben. Außer der Eichkurve wird dafür noch die Richtungsempfindlichkeitskurve angegeben. Diese gestattet außer der Größe der Wandschubspannung auch ihre Richtung zu bestimmen.

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.

(Eingegangen am 29. Mai 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Hubert Ludwieg*, (20b) Göttingen (Hann.), Böttingerstraße 6/8.

Das Abbremsen drehsymmetrischer Körper beim Fall auf Sand.

Von **R. Grammel.**

1. Einleitung. Die folgende kleine Untersuchung ist dadurch angeregt worden, daß Herr *Feldtkeller*[1] zur Prüfung von Beschleunigungsmessern kegelförmige Körper von verschiedenen Gewichten und verschiedenen Erzeugungswinkeln aus verschiedenen Höhen frei herabfallen ließ und durch Auftreffen auf einen ebengestampften Sandraum abbremste. Die magnetostriktiv sehr genau gemessenen Beschleunigungen ergaben, wenn man Koordinaten verwandte, die (mittels der Auftreffgeschwindigkeit und der Eindringtiefe) dimensionslos normiert waren, sehr charakteristische und völlig sich deckende Beschleunigungs-Zeit-Kurven, unabhängig von Kegelgewicht, Erzeugungswinkel, Fallhöhe und Sandkonstitution (vgl. später Abb. 3).

Es wäre aussichtslos, den verwickelten Vorgang aus der Mechanik der Sandkörner erklären zu wollen. Wie man aber den molekular sicherlich ebenfalls recht verwickelten Vorgang der Reibung zwischen festen Körpern phänomenologisch sehr gut und einfach durch die *Coulomb-Morin*schen Gesetze darstellen kann, so liegt es nahe, auch hier nach einem phänomenologischen Gesetz zu suchen, zumal da die gefundenen Kurven vermuten lassen, daß dieses Gesetz eine ganz einfache Form haben muß. Ich glaube es im folgenden gefunden zu haben.

2. Das Abbremsgesetz. Wir legen folgendes Gesetz zugrunde: Beim Abbremsen eines drehsymmetrischen Körpers, wenn er sich in Achsenrichtung in einen sandartigen Halbraum (mit ursprünglich ebener, senkrecht zur Körperachse liegender Oberfläche) einpreßt, ist der Impulsverlust $-dJ$ im Zeitelement dt proportional zu der in diesem Zeitelement verdrängten Sandmasse dm.

Lautet in einem Koordinatensystem (r,z), dessen Ursprung mit der Spitze des Körpers in den Sand eindringt (Abb. 1), die Gleichung der Meridiankurve $r=r(z)$, so ist mit dem Eindringweg z zur Zeit t einerseits $dm=\pi r^2 dz$. Andererseits ist $dJ=Mb\,dt$, wenn M die Körpermasse und b seine (negative) Beschleunigung bedeutet. Unser Grundgesetz besagt also mit einer noch offenen Konstanten c, die von der Konstitution des Sandes und möglicherweise vom Körpertyp abhängt,

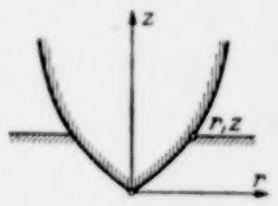

Abb. 1. Spitze des Körpers beim Eindringen in den Sandraum.

$$-Mb\,dt=cr^2\,dz\,. \tag{1}$$

Wegen $b=dv/dt$, wo v die Körpergeschwindigkeit zur Zeit t ist, folgt hieraus durch Integration über den ganzen Abbremsvorgang, der mit der Geschwindigkeit v_0 beginnt und bis zur Eindringtiefe z_∞ führt,

$$Mv_0=ck(z_\infty) \qquad \text{mit} \qquad k(z)=\int_0^z r^2(z)\,dz\,. \tag{2}$$

Um die unbekannte Konstante c zu eliminieren, dividiert man (1) durch (2) und erhält mit $dz/dt=v$ das experimentell nachprüfbare Ergebnis

$$b=-\frac{v_0}{k(z_\infty)}\,r^2(z)\cdot v\,. \tag{3}$$

3. Dimensionslose Darstellung des Abbremsvorgangs. Es ist zweckmäßig, folgende dimensionslosen Variabeln und Funktionen einzuführen:

$$\xi=\frac{z_\infty}{v_0^2}\,b, \quad \eta=\frac{v}{v_0}, \quad \zeta=\frac{z}{z_\infty}, \quad \tau=\frac{v_0}{z_\infty}\,t, \tag{4}$$

$$\varrho(\zeta)=\frac{r(z)}{z_\infty}, \qquad \varkappa(\zeta)=\int_0^\zeta \varrho^2(\zeta)\,d\zeta\,\left(=\frac{k(z)}{z_\infty^3}\right). \tag{5}$$

Dann ist $\xi=d\eta/d\tau$ und $\eta=d\zeta/d\tau$, und aus (3) wird

$$\xi=-\frac{1}{\varkappa(1)}\,\varrho^2(\zeta)\cdot\eta\,. \tag{6}$$

[1] *R. Feldtkeller* u. *H. Wilde*, Frequenz 3 (1949) S. 29.

Zwei weitere Integrationen liefern

$$\eta = 1 - \frac{\varkappa(\zeta)}{\varkappa(1)} \tag{7}$$

und

$$\tau = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{1 - \frac{\varkappa(\zeta)}{\varkappa(1)}} \tag{8}$$

und somit aus (6) und (7)

$$\xi = -\frac{\varrho^2(\zeta)}{\varkappa(1)}\left[1 - \frac{\varkappa(\zeta)}{\varkappa(1)}\right]. \tag{9}$$

Durch (7) bis (9) sind die normierten Größen ξ (Beschleunigung), η (Geschwindigkeit) und τ (Zeit) in dem normierten Eindringweg ζ ausgedrückt, und damit kennt man zufolge (4) auch b, v und z als Funktionen von t.

Insbesondere folgt der größte Absolutwert der (normierten) Beschleunigung ξ gemäß (9) und (5) aus

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = -\frac{2\varrho\varrho'}{\varkappa(1)}\left[1 - \frac{\varkappa(\zeta)}{\varkappa(1)}\right] + \frac{\varrho^4}{\varkappa^2(1)} = 0,$$

also aus

$$\varrho^3(\zeta) = 2\,\varrho'(\zeta)\,[\varkappa(1) - \varkappa(\zeta)]. \tag{10}$$

Mit (10) gibt (9) vollends

$$|\xi|_{\max} = \frac{\varrho^5(\zeta_m)}{2\varkappa^2(1)\,\varrho'(\zeta_m)}, \tag{11}$$

worin ζ_m die maßgebende reelle positive Wurzel der Gleichung (10) ist.

4. Spezielle Drehkörper. Besonders durchsichtig werden die Ergebnisse (7) bis (11) für Drehkörper mit den Meridiankurven

$$r = p z^n, \tag{12}$$

Abb. 2. Meridiankurven einiger Körper.

wo p ein Formparameter und n ein positiver Exponent ist (Abb. 2 für $n = \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2). Darunter sind insbesondere die Kreiskegel mit $n = 1$ und den Erzeugungswinkeln $\alpha = \operatorname{arc\,tg} p$ enthalten. Man findet

$$\varrho(\zeta) = p z_\infty^{n-1} \zeta^n,$$

$$\varkappa(\zeta) = \frac{p^2 z_\infty^{2(n-1)}}{2n+1} \zeta^{2n+1}$$

und erhält also allgemein (n) und besonders für den Kegel ($n = 1$)

$$\eta = 1 - \zeta^{2n+1} \qquad \text{(Kegel: } \eta = 1 - \zeta^3\text{)}, \tag{7a}$$

$$\tau = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{1 - \zeta^{2n+1}} \qquad \text{(Kegel: siehe (8b))}, \tag{8a}$$

$$\xi = -(2n+1)\zeta^{2n}\,(1 - \zeta^{2n+1}) \qquad \text{(Kegel: } \xi = -3\,\zeta^2(1 - \zeta^3)\text{)}, \tag{9a}$$

$$\zeta_m = \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \qquad \text{(Kegel: } \zeta_m = 0{,}737\text{)}, \tag{10a}$$

$$|\xi|_{\max} = \frac{(2n+1)^2}{2n}\left(\frac{2n}{4n+1}\right)^{\frac{4n+1}{2n+1}} \qquad \text{(Kegel: } |\xi|_{\max} = 0{,}977\text{)}, \tag{11a}$$

und zwar in allen Fällen bemerkenswerterweise unabhängig vom Formparameter p, also bloß noch abhängig vom Körpertyp; insbesondere beim Kegel unabhängig vom Erzeugungswinkel α; ferner in allen Fällen unabhängig von der Körpermasse M, von der Auftreffgeschwindigkeit v_0 und von der Konstitution des Sandes (also von seiner Feuchtigkeit, Körnigkeit und Festpressung).

Diese Unabhängigkeiten der Formeln (7a) bis (11a) sind insbesondere für kegelförmige Körper durch die Versuche in sehr weitem Umfange bestätigt, wie Abb. 3 zeigt[1], worin außer vielen Meßpunkten die theoretische Kurve $\eta(\tau)$ gemäß (7a) und (8a) für $n = 1$ eingetragen ist.

[1] Diese Figur mit ihren Meßpunkten hat mir Herr *Feldtkeller* freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

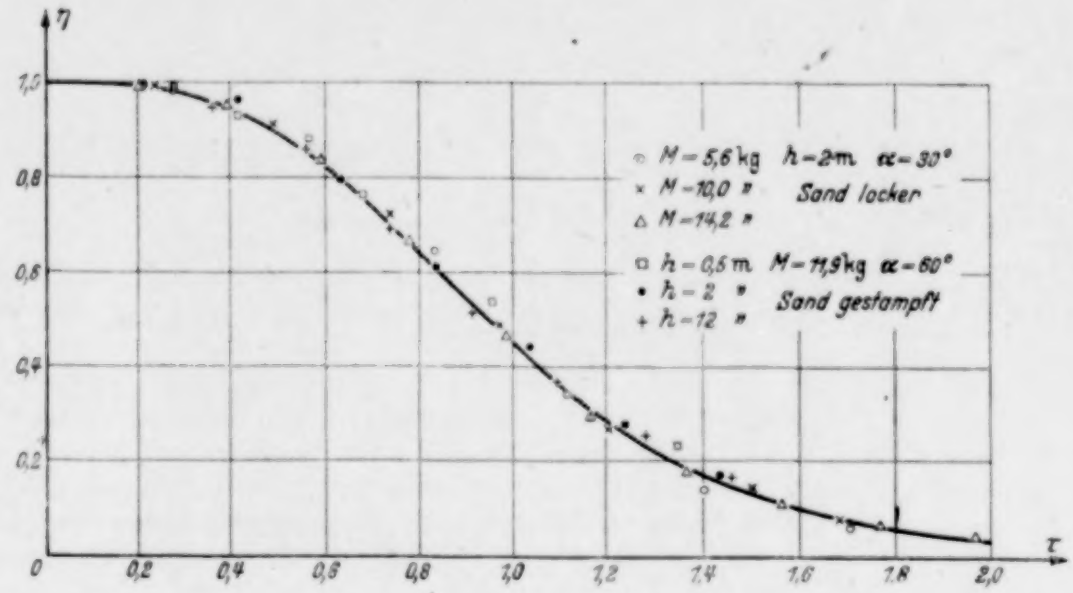

Abb. 3. Theoretische (η, τ)-Kurve und Meßpunkte für verschiedene Körpermassen M, Fallhöhen h, Kegelwinkel α und Sandkonstitutionen.

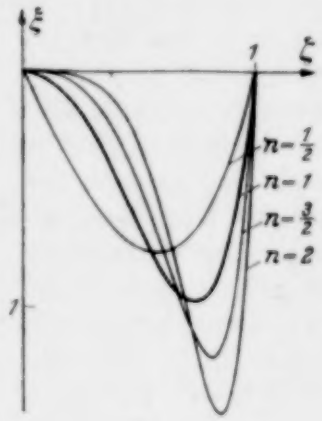

Abb. 4. (ξ, ζ)-Kurven.

Das Integral (8a) hat folgende besonderen Werte:

$$n = \frac{1}{2}: \quad \tau = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\zeta, \quad \text{also} \quad \zeta = \mathfrak{Tg}\,\tau,$$

$$n = 1: \quad \tau = \frac{1}{6}\ln(1+\zeta+\zeta^2) - \frac{1}{3}\ln(1-\zeta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\,\zeta}{2+\zeta},$$

$$n = \frac{3}{2}: \quad \tau = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}\zeta + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\zeta),$$

$$n = 2: \quad \tau = \frac{1}{5}\left[\frac{\beta}{2}\ln(1+\beta\zeta+\zeta^2) - \frac{\gamma}{2}\ln(1-\gamma\zeta+\zeta^2) - \ln(1-\zeta) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\gamma\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\gamma\sqrt{5}}\,\zeta}{2+\beta\zeta} + \sqrt{\beta\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta\sqrt{5}}\,\zeta}{2-\gamma\zeta}\right]$$
$$\text{mit} \quad \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \quad \gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1). \qquad \text{(8b)}$$

In Abb. 4 bis 8 sind für die einzelnen Werte von n die Kurven $\xi(\zeta)$, $\eta(\zeta)$, $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ und $\zeta(\tau)$ gemäß (7a) bis (11a) und (8b) aufgetragen. Die experimentell nachgeprüften Kurven für den Kreiskegel sind dabei jeweils stärker hervorgehoben.

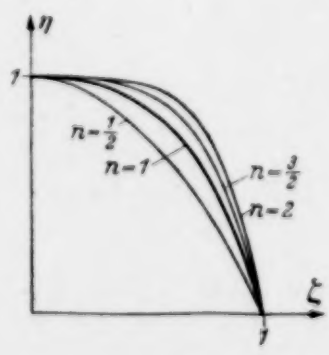

Abb. 5. (η, ζ)-Kurven.

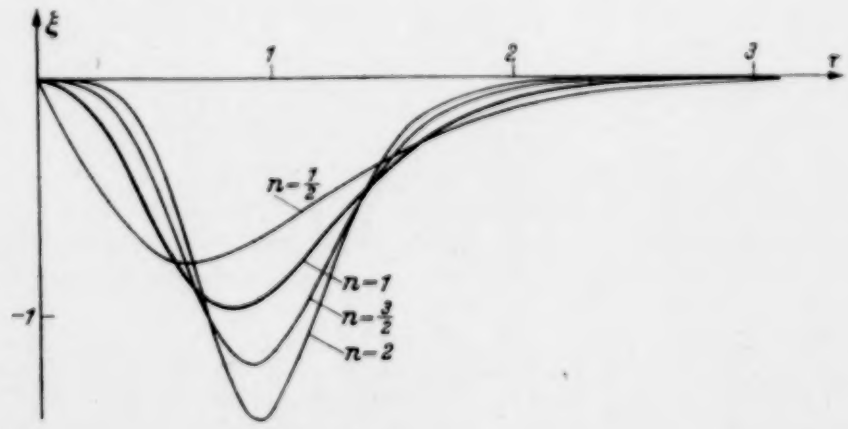

Abb. 6. (ξ, τ)-Kurven.

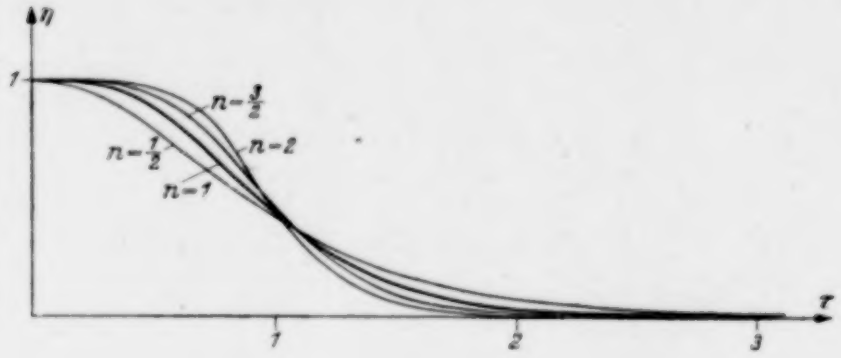

Abb. 7. (η, τ)-Kurven.

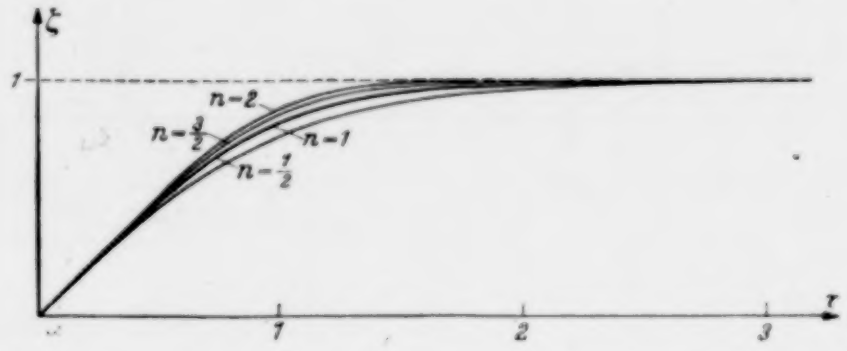

Abb. 8. (ζ, τ)-Kurven.

5. Schlußbemerkung. Während die vorstehenden Ergebnisse für Kreiskegel mit nicht allzu großen Erzeugungswinkeln (wenigstens bis zu $\alpha = 60°$) durch die Versuche zweifellos gesichert sind, muß man sie für andere Körpertypen mit dem gebotenen Vorbehalt aussprechen. Ich halte sie für zuverlässig bei allen Körpertypen, die nicht allzusehr von der Kegelform abweichen. Dagegen halte ich es nicht für statthaft, sie ohne weiteres auf Kreiszylinder auszudehnen, die mit ihrer ebenen Stirnfläche auf der Sandoberfläche auftreffen [man erhielte dabei $\eta = -\xi = 1 - \zeta$, $\tau = -\ln(1-\zeta)$, $\eta = -\xi = e^{-\tau}$, $\zeta = 1 - e^{-\tau}$, $\zeta_m = 0$, $|\xi|_{\max} = 1$]. Denn beim Kreiszylinder springt die Verzögerung im Augenblick des Aufschlagens sofort unstetig auf ihren Höchstwert, und dies muß im Zylinder eine heftige Stoßwelle erzeugen, die seine Bewegung stark beeinflussen kann. Für solche Vorgänge aber mag unser phänomenologisches Gesetz keine Gültigkeit mehr beanspruchen.

(Eingegangen am 26. Juni 1948.)

Anschrift des Verfassers:
Professor Dr.-Ing. Dr. *Richard Grammel*, (14a) Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101.

Zur Membrantheorie der allgemeinen Rotationsschalen.

Von **W. Zerna.**

1. Einleitung. Über die Ermittlung des Membranspannungszustandes von Rotationsschalen liegt bereits eine Reihe von Untersuchungen vor[1]. Doch betrachten sie alle das Problem unter mehr oder weniger einschränkenden Voraussetzungen, sei es bezüglich der Formgebung, sei es bezüglich der Belastung. Die Lösung der allgemeinen biegungsfreien Rotationsschale unter allgemeiner Belastung bietet indessen nach den bisher bekannt gewordenen Berechnungsverfahren teilweise beträchtliche Schwierigkeiten. Die folgende Untersuchung[2] der Rotationsschalen setzt sich zum Ziele, den Membranspannungszustand möglichst allgemein zu berechnen.

2. Zur Geometrie der Rotationsschalen. Es werde die Mittelfläche einer beliebigen Rotationsschale betrachtet. Die Lage der Meridianschnitte sei in üblicher Weise durch den Winkel φ angegeben, der auf eine feste Richtung $\varphi=0$ bezogen sei. Erstreckt sich die Schalenfläche über den Winkelbereich von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$, so stellt sie eine Rotationskuppel dar. Die in einem Meridianschnitt $\varphi=$ konst. gelegene Meridiankurve werde auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem y, z bezogen, dessen Ursprung 0 auf der Rotationsachse liegt, und dessen Achsen in Richtung der Rotationsachse und senkrecht dazu verlaufen (Abb. 1). Die Koordinaten y und z eines Punktes P der Meridiankurve mögen von einem Parameter ϑ abhängig gemacht werden:

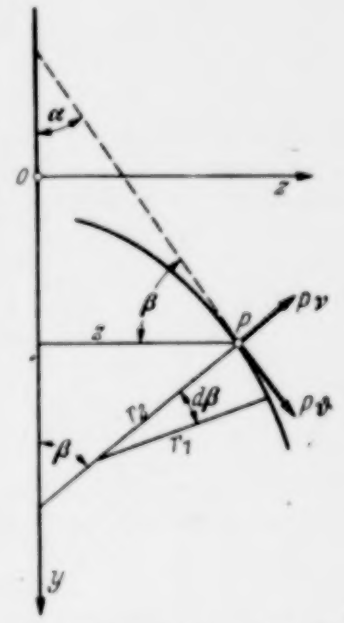

Abb. 1. Meridianschnitt $\varphi=$ konst.

$$y=y(\vartheta)\,, \qquad z=z(\vartheta)\,. \tag{1}$$

Der Winkel, den die Tangente in P an die Meridiankurve mit der y- bzw. z-Achse bildet, sei α bzw. β. Es werde gesetzt

$$\frac{dy}{d\vartheta}=y'\,, \qquad \frac{dz}{d\vartheta}=z'\,.$$

Die Winkel α und β lassen sich mittels (1) wie folgt ausdrücken:

$$\cos\alpha=\frac{y'}{\sqrt{y'^2+z'^2}}\,, \qquad \cos\beta=\frac{z'}{\sqrt{y'^2+z'^2}}\,. \tag{2}$$

Für die Krümmung der Meridiankurve, die wie in Abb. 1 dargestellt als positiv gelten soll, ergibt sich

$$\frac{1}{r_1}=-\frac{y'z''-z'y''}{(y'^2+z'^2)^{3/2}}\,. \tag{3}$$

Der Hauptkrümmungsradius r_2 bestimmt sich zu

$$r_2=\frac{z}{\sin\beta}=\frac{z}{y'}\sqrt{y'^2+z'^2}\,. \tag{4}$$

3. Gleichgewichtsbedingungen. Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt: N_φ, N_ϑ = Längskräfte in Richtung der Breitenkreistangente und der Meridiantangente, T = Schubkräfte, p_φ, p_ϑ, p_ν = Komponenten der äußeren Belastung in Richtung der Breitenkreistangente, der Meridiantangente und der Schalennormalen, wobei alle Lasten auf die Flächeneinheit der

---

[1] Vgl. z. B. *Fr. Dischinger*, Schalen und Rippenkuppeln, Handbuch für Eisenbeton, Bd. 6, S. 194, Berlin 1928. — *Fr. Dischinger*, Bauing. 16 (1935) S. 374. — *H. Reißner*, Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln). Müller-Breslau-Festschrift, Leipzig 1912. — *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, S. 21, Berlin 1934. — *A. Pucher*, Inter. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Abhandlungen Bd. 5, S. 275, Zürich 1937/38. — *W. Flügge*, Z. angew. Math. Mech., Bd. 25/27 (1947) S. 65.

[2] Auszug aus einer von der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation (Juni 1947).

Schalenmittelfläche bezogen sind. Weiterhin werden folgende als reduzierte Längskräfte bzw. Lastkomponenten bezeichneten Größen definiert:

$$\left.\begin{aligned} \bar{N}_\varphi &= N_\varphi \frac{\sqrt{y'^2+z'^2}}{z} = N_\varphi \frac{z'}{z\cos\beta}, \\ \bar{N}_\vartheta &= N_\vartheta \frac{z}{\sqrt{y'^2+z'^2}} = N_\vartheta \frac{z\cos\beta}{z'}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_\varphi &= p_\varphi \sqrt{y'^2+z'^2} = p_\varphi \frac{z'}{\cos\beta} = p_\varphi \frac{y'}{\cos\alpha}, \\ \bar{p}_\vartheta &= p_\vartheta z - \frac{z z'}{y'} p_\nu, \\ \bar{p}_\nu &= p_\nu \frac{y'^2+z'^2}{y'} = p_\nu \frac{y'}{\cos^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die bekannten Gleichgewichtsbedingungen der Membrantheorie am Schalenelement der Rotationsschale in Richtung des Breitenkreises, des Meridians und der Schalennormalen lauten mit den hier benutzten Bezeichnungen[1]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(zT) + \frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi} + T\cos\beta + p_\varphi z = 0, \\ &\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(zN_\vartheta) + \frac{\partial T}{\partial\varphi} - N_\varphi\cos\beta + p_\vartheta z = 0, \\ &N_\varphi + \frac{r_2}{r_1}N_\vartheta - p_\nu r_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Beachtung der Beziehungen (2) bis (4) sowie Einführung der reduzierten Kräfte gemäß (5) und (6) führt diese Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\bar{N}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial T}{\partial\vartheta} + 2\frac{z'}{z}T + \bar{p}_\varphi = 0, \\ &\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{\partial\bar{N}_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{y''}{y'}\bar{N}_\vartheta + \bar{p}_\vartheta = 0, \\ &\bar{N}_\varphi - \frac{y'z''-y''z'}{y'z}\bar{N}_\vartheta - \bar{p}_\nu = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

4. Äußere Belastung. Die reduzierten Lastkomponenten werden in Fourierreihen nach φ entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi n}\sin n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} b_{\varphi n}\cos n\varphi, \\ \bar{p}_\vartheta &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{\vartheta n}\cos n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} b_{\vartheta n}\sin n\varphi, \\ \bar{p}_\nu &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{\nu n}\cos n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu n}\sin n\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Darin sind $a_{\varphi n}$, $a_{\vartheta n}$, $a_{\nu n}$, $b_{\varphi n}$, $b_{\vartheta n}$, $b_{\nu n}$ bekannte Funktionen von ϑ. Der Index n, der von nun an häufig gebraucht wird, soll stets anzeigen, daß die betreffenden Funktionen einem bestimmten Wert von n zugeordnet sind.

Aus dem allgemeinen Ausdruck (9) werden die folgenden beiden speziellen Lastfälle herausgegriffen:

a) Lastfall A:

$$\bar{p}_\varphi = a_{\varphi n}\sin n\varphi, \qquad \bar{p}_\vartheta = a_{\vartheta n}\cos n\varphi, \qquad \bar{p}_\nu = a_{\nu n}\cos n\varphi. \tag{10}$$

b) Lastfall B:

$$\bar{p}_\varphi = b_{\varphi n}\cos n\varphi, \qquad \bar{p}_\vartheta = b_{\vartheta n}\sin n\varphi, \qquad \bar{p}_\nu = b_{\nu n}\sin n\varphi. \tag{11}$$

Wegen der Linearität der Differentialgleichungen (8) kann für jede der Belastungen (10) und (11) zu jedem n gesondert die Lösung bestimmt und die Gesamtlösung für die Belastung (9) als Summe der so erhaltenen Einzellösungen gewonnen werden. Es genügt daher, ohne daß die

[1] Vgl. z. B. *W. Flügge*, a. a. O.

Allgemeinheit eingeschränkt wird, die beiden Lastfälle A und B gemäß (10) und (11) zu behandeln.

5. Differentialgleichung des Problems. Die drei Gleichgewichtsbedingungen (8) lassen sich auf eine einzige zurückführen. Zu diesem Zweck wird die erste nach φ, die zweite nach ϑ differentiert; dann werden beide Ausdrücke voneinander subtrahiert. Man erhält

$$\frac{\partial^2 \overline{N}_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \overline{N}_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{2z'}{z}\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \left[\frac{y'''}{y''} + \left(\frac{y''}{y'}\right)^2\right]\overline{N}_\vartheta - \frac{y''}{y'}\frac{\partial \overline{N}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \overline{p}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \overline{p}_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0\,. \tag{12}$$

Die Schubkräfte T und Längskräfte $\overline{N}_\varphi$ lassen sich mit Hilfe der zweiten und dritten Gleichung (8) aus (12) eliminieren. Mit

$$\left.\begin{aligned} f_1(\vartheta) &= \frac{z''}{z} - \frac{y''z'}{y'z}\,,\\ f_2(\vartheta) &= \frac{y''}{y'} + \frac{2z'}{z}\,,\\ f_3(\vartheta) &= \frac{y'''}{y'} + \frac{2y''z'}{y'z} - \left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \end{aligned}\right| \tag{13}$$

erhält man schließlich nach einfacher Zwischenrechnung

$$\frac{\partial^2 \overline{N}_\vartheta}{\partial \vartheta^2} - f_1(\vartheta)\frac{\partial^2 \overline{N}_\vartheta}{\partial \varphi^2} + f_2(\vartheta)\frac{\partial \overline{N}_\vartheta}{\partial \vartheta} + f_3(\vartheta)\,\overline{N}_\vartheta = \overline{q}\,, \tag{14}$$

worin

$$\overline{q} = \frac{\partial^2 \overline{p}_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \overline{p}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \overline{p}_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2z'}{z}\,\overline{p}_\vartheta \tag{15}$$

bedeutet. Dies ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung der reduzierten Meridianlängskraft $\overline{N}_\vartheta$. Ist $\overline{N}_\vartheta$ gefunden, so ergeben sich die übrigen Schnittkräfte $\overline{N}_\varphi$ und T gemäß (8) aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial \overline{N}_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{y''}{y'}\overline{N}_\vartheta - \overline{p}_\vartheta\,,\\ \overline{N}_\varphi &= f_1(\vartheta)\,\overline{N}_\vartheta + \overline{p}_r\,. \end{aligned}\right| \tag{16}$$

Die Ermittlung des Membranspannungszustandes einer beliebig geformten und belasteten Rotationsschale ist damit zurückgeführt auf die Integration der partiellen Differentialgleichung (14). Sie ist vom hyperbolischen, elliptischen oder parabolischen Typ, je nachdem

$$f_1(\vartheta) \gtreqless 0\,.$$

Für das *Gauß*sche Krümmungsmaß K der Schalenfläche ergibt sich die Beziehung

$$K = -\left(\frac{y'}{y'^2 + z'^2}\right)^2 f_1(\vartheta)\,,$$

und man erkennt, daß den verschiedenen Typen der Differentialgleichung (14) Schalen mit negativem, positivem oder verschwindendem Krümmungsmaß zugeordnet sind.

Es werde nunmehr der Lastfall A nach (10) betrachtet. Es zeigt sich dann, daß der Ansatz

$$\overline{N}_\varphi = A_{\varphi n}\cos n\varphi\,, \qquad \overline{N}_\vartheta = A_{\vartheta n}\cos n\varphi\,, \qquad T = A_n \sin n\varphi\,, \tag{17}$$

worin $A_{\varphi n}$, $A_{\vartheta n}$, A_n nur von ϑ abhängen, die Gleichgewichtsbedingungen (8) befriedigt. Die partielle Differentialgleichung (14) geht damit über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 A_{\vartheta n}}{d\vartheta^2} + f_2(\vartheta)\frac{dA_{\vartheta n}}{d\vartheta} + A_{\vartheta n}\left[n^2 f_1(\vartheta) + f_3(\vartheta)\right] = \overline{q}_{An}\,. \tag{18}$$

Die Störungsfunktion $\overline{q}_{An}$ wird durch die Belastungsgrößen ausgedrückt:

$$\overline{q}_{An} = -n^2 a_{rn} + n a_{\vartheta n} - \frac{da_{\vartheta n}}{d\vartheta} - \frac{2z'}{z}\,a_{\vartheta n}\,. \tag{19}$$

Der Belastungsfall B erfüllt mit dem Ansatz

$$\overline{N}_\varphi = B_{\varphi n}\sin n\varphi\,, \qquad \overline{N}_\vartheta = B_{\vartheta n}\sin n\varphi\,, \qquad T = B_n \cos n\varphi\,, \tag{20}$$

worin $B_{\varphi n}$, $B_{\vartheta n}$, B_n wiederum nur von ϑ abhängen, die Gleichungen (8) und führt (14) in

$$\frac{d^2 B_{\vartheta n}}{d\vartheta^2} + f_2(\vartheta)\frac{d B_{\vartheta n}}{d\vartheta} + B_{\vartheta n}[n^2 f_1(\vartheta) + f_3(\vartheta)] = \bar{q}_{Bn} \tag{21}$$

über. Die Störungsfunktion $\bar{q}_{Bn}$ lautet jetzt

$$\bar{q}_{Bn} = -n^2 b_{rn} - n b_{\varphi n} - \frac{d b_{\vartheta n}}{d\vartheta} - \frac{2z'}{z} b_{\vartheta n} . \tag{22}$$

Ein Vergleich von (18) mit (21) und (19) mit (22) zeigt, daß die Differentialgleichungen für beide Lastfälle die gleiche Form haben. Lediglich die Störungsfunktionen $\bar{q}_{An}$ und $\bar{q}_{Bn}$ unterscheiden sich dadurch, daß in $\bar{q}_{Bn}$ die Zahl n durch $-n$ ersetzt ist. Die weiteren Betrachtungen können sich daher im wesentlichen auf die Behandlung des Lastfalles A beschränken. Alle dafür abgeleiteten Beziehungen lassen sich sofort auf Lastfall B übertragen, indem alle Größen a und A durch die entsprechenden b und B sowie n durch $-n$ ersetzt werden.

Einführung der neuen Veränderlichen

$$\Phi_n = A_{\vartheta n}\, z \sqrt{y'} \tag{23a}$$

bringt mit

$$A_{\vartheta n} = \frac{\Phi_n}{z\sqrt{y'}} \tag{23b}$$

(18) bzw. (21), wenn wie bisher Striche Ableitungen nach ϑ bezeichnen, in die endgültige Gestalt

$$\Phi_n'' + F_n(\vartheta)\,\Phi_n = q_n , \tag{24}$$

die als grundlegende Differentialgleichung des hier behandelten Problems bezeichnet werden kann. In (24) bedeutet

$$F_n(\vartheta) = \frac{n^2-1}{y' z}(y' z'' - y'' z') + \frac{y'''}{2y'} - \frac{3}{4}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \tag{25}$$

und ist mithin, abgesehen von n, durch die Meridiankurve bestimmt. Für die Störungsfunktion q_n ist fallweise, dem Lastfall A oder B entsprechend, zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} q_{An} &= \bar{q}_{An}\, z \sqrt{y'} = -z\sqrt{y'}(a'_{\vartheta n} - n a_{\varphi n} + n^2 a_{rn}) - 2z'\sqrt{y'}\, a_{\vartheta n} , \\ q_{Bn} &= \bar{q}_{Bn}\, z \sqrt{y'} = -z\sqrt{y'}(b'_{\vartheta n} + n b_{\varphi n} + n^2 b_{rn}) - 2z'\sqrt{y'}\, b_{\vartheta n} . \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Aufgabe der Ermittlung der Schnittkräfte besteht nunmehr in der Integration der Differentialgleichung (24). In einigen Fällen läßt sich ihr Integral auf analytischem Wege finden. Wenn dies nicht möglich ist, führt eines der bekannten Verfahren zur numerischen Integration von linearen Differentialgleichungen zum Ziel, wozu die Form von (24) besonders geeignet ist. (Vgl. Ziff. 7.)

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, wenn

$$y \equiv \vartheta$$

gesetzt wird. Die Meridiankurve erscheint dann in der Form

$$z = z(y) .$$

Vermöge $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$ gewinnt man aus (25)

$$F_n(y) = \frac{z''}{z}(n^2 - 1) \tag{27}$$

und aus (24) die Differentialgleichung[1]

$$\Phi_n'' + \frac{z''}{z}(n^2-1)\,\Phi_n = q_n \tag{28}$$

mit den Störungsgliedern

$$\left.\begin{aligned} q_{An} &= -z(a'_{\vartheta n} - n a_{\varphi n} + n^2 a_{rn}) - 2z' a_{\vartheta n} , \\ \text{bzw.} \quad q_{Bn} &= -z(b'_{\vartheta n} + n b_{\varphi n} + n^2 b_{rn}) - 2z' b_{\vartheta n} . \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Für den Lastfall $n = 1$ geht (28) über in

$$\Phi_1'' = q_1 .$$

[1] Während der Drucklegung wurde mir bekannt, daß diese Gleichung auch von *P. Nemenyi* und *C. Truesdell*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 29 (1943), S. 159, gefunden wurde.

Aus der Analogie dieser Differentialgleichung zu der beim Balken geltenden Beziehung

$$M'' = p$$

zwischen Biegemoment M und Belastung p lassen sich in gewissen Fällen die Schnittkräfte entsprechend der Bestimmung des Biegemomentes eines Balkens ermitteln. Diese Tatsache benutzt *Dischinger*[1] zur Berechnung der antimetrisch belasteten Rotationskuppel und der sog. Ringschale unter Eigengewichtsbelastung. Hier ist nun nachgewiesen, daß diese besonders einfache Rechnungsweise als Sonderfall aus der für beliebige n geltenden Differentialgleichung (28) hervorgeht.

6. Formeln für die Schnittkräfte. a) Lastfall A. Sämtliche Schnittkräfte lassen sich durch die Funktion Φ_n ausdrücken. Im Lastfall A gilt folgende Entwicklung: Aus (17) folgt mit (23b) und mit (5)

$$N_\vartheta = \frac{\Phi_n y'}{y'^{1/2} z^2 \cos\alpha} \cos n\varphi = \frac{\Phi_n z'}{y'^{1/2} z^2 \cos\beta} \cos n\varphi \,. \tag{30}$$

Aus der zweiten Gleichung (16) ergibt sich mit (30), (10) und (5)

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{\cos\alpha}{y'} \left[(y' z'' - y'' z') \frac{\Phi_n}{y'^{3/2} z} + a_{\nu n} z \right] \cos n\varphi \,, \\ &= \frac{\cos\beta}{z'} \left[(y' z'' - y'' z') \frac{\Phi_n}{y'^{3/2} z} + a_{\nu n} z \right] \cos n\varphi \,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die erste Gleichung (16) liefert mit (30) und (10)

$$T = -\frac{1}{n} \left[\frac{\Phi'_n}{y'^{1/2} z} - (2 y' z' - y'' z) \frac{\Phi_n}{2 y'^{3/2} z^2} + a_{\vartheta n} \right] \sin n\varphi \,. \tag{32}$$

Ist die Meridiankurve durch die Beziehung $z = z(y)$ ausgedrückt, so ergeben sich die vereinfachten Formeln

$$\left.\begin{aligned} N_\vartheta &= \frac{\Phi_n}{z^2 \cos\alpha} \cos n\varphi \,, \\ N_\varphi &= \cos\alpha \left(\frac{z''}{z} \Phi_n + a_{\nu n} \right) \cos n\varphi \,, \\ T &= -\frac{1}{n} \left(\frac{\Phi'_n}{z} - \frac{z}{z^2} \Phi_n + a_{\vartheta n} \right) \sin\varphi \,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

b) Lastfall B. Im Lastfall B erhält man für die Schnittkräfte auf entsprechende Weise die nachstehend aufgeführten Formeln:

$$\left.\begin{aligned} N_\vartheta &= \frac{\Phi_n y'}{y'^{1/2} z^2 \cos\alpha} \sin n\varphi = \frac{\Phi_n z'}{y'^{1/2} z^2 \cos\beta} \sin n\varphi \,, \\ N_\varphi &= \frac{\cos\alpha}{y'} \left[(y' z'' - y'' z') \frac{\Phi_n}{y'^{3/2} z} + b_{\nu n} z \right] \sin n\varphi \\ &= \frac{\cos\beta}{z'} \left[(y' z'' - y'' z') \frac{\Phi_n}{y'^{3/2} z} + b_{\nu n} z \right] \sin n\varphi \,, \\ T &= \frac{1}{n} \left[\frac{\Phi'_n}{y'^{1/2} z} - (2 y' z' - y'' z) \frac{\Phi_n}{2 y'^{3/2} z^2} + b_{\vartheta n} \right] \cos n\varphi \,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Wenn die Meridiankurve durch $z = z(y)$ gegeben ist, gilt

$$\left.\begin{aligned} N_\vartheta &= \frac{\Phi_n}{z^2 \cos\alpha} \sin n\varphi \,, \\ N_\varphi &= \cos\alpha \left[\frac{z''}{z} \Phi_n + b_{\nu n} \right] \sin n\varphi \,, \\ T &= \frac{1}{n} \left[\frac{\Phi'_n}{z} - \frac{z'}{z^2} \Phi_n + b_{\vartheta n} \right] \cos n\varphi \,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

7. Zur numerischen Integration der Differentialgleichung. Die Integration der das Problem beschreibenden Differentialgleichung (24) führt nur bei besonders einfachen Schalenformen zu geschlossenen Ausdrücken. In allen allgemeineren Fällen, wie sie gerade für praktische An-

[1] *Fr. Dischinger*, a. a. O.

wendungen wichtig sind, wird man sich daher eines numerischen Lösungsverfahrens bedienen, wozu nachstehend einige Hinweise gegeben werden sollen.

Die Differentialgleichung (24) gibt durch zweimalige Integration

$$\Phi_n = -\int_0^{\vartheta}\int_0^{\xi} [F_n(\xi)\,\Phi_n - q_n]\,d\xi\,d\xi + D_n\vartheta + E_n\,. \tag{36}$$

Darin bezeichnet ξ eine zwischen dem Koordinatenanfangspunkt und der Stelle ϑ gelegene Zwischenvariable.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten D_n und E_n stehen folgende Bedingungen zur Verfügung:

a) Kuppelschalen. Damit die Schnittkräfte im Scheitel endlich bleiben, muß gemäß (30) und (32) für $z=0$ die Funktion Φ_n und ihre erste Ableitung verschwinden:

$$[\Phi_n]_{z=0} = 0\,, \quad [\Phi_n']_{z=0} = 0\,. \tag{37}$$

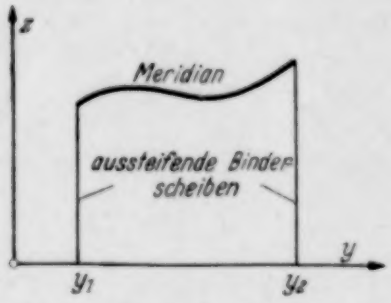

Abb. 2. Meridian zwischen aussteifenden Binderscheiben.

b) Rotationsschalen, deren Meridian zwischen zwei aussteifende Binderscheiben gespannt ist (Abb. 2). Unter der Annahme, daß die aussteifenden Binderscheiben nur eine Steifigkeit in ihrer Ebene haben, müssen die an den Rändern $y=y_1$ und $y=y_2$ heraustretenden Kräfte senkrecht zur Scheibe verschwinden. Daraus folgt, daß längs der Binderscheiben N_ϑ gleich Null sein muß, so daß die Schale nur Schubkräfte auf die Binderscheiben übertragen kann. Nach (30) lauten dann die Randbedingungen

$$[\Phi_n]_{y=y_1} = 0\,, \quad [\Phi_n]_{y=y_2} = 0\,. \tag{38}$$

Durch (37) und (38) sind für die wichtigsten Schalenformen die Anfangs- bzw. Randwerte gegeben, womit die Voraussetzung für die Anwendung des bekannten Verfahrens der schrittweisen Näherung geschaffen ist. Ausgehend von einem geschätzten Φ_n-Verlauf läßt sich mit Hilfe der Integralgleichung (36) eine verbesserte Lösung bestimmen, die dann wiederum als Ausgangspunkt für eine weitere Verbesserung der Funktion Φ_n dient und so fort. Man kann erwarten, daß das Verfahren in vielen Fällen konvergiert; meist genügen nur wenige Rechnungsgänge, um eine recht gute, im allgemeinen ausreichende Näherung zu erzielen.

Zur Konvergenzbeschleunigung ist es vorteilhaft, (36) mit Benutzung der abkürzenden Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{n0} &= \int_0^{\vartheta}\int_0^{\xi} q_n\,d\xi\,d\xi + D_{n0}\vartheta + E_{n0}\,, \\ \Delta\Phi_n &= \int_0^{\vartheta}\int_0^{\xi} F_n\,\Phi_n\,d\xi\,d\xi + \Delta D_n\vartheta + \Delta E_n \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

in die Form

$$\Phi_n = \Phi_{n0} - \Delta\Phi_n \tag{40}$$

zu bringen, worin jeder der Ausdrücke (39) den Rand- bzw. Anfangsbedingungen zu genügen hat. Zur Berechnung von Φ_n führt man zweckmäßig die Näherungslösung

$$\bar{\Phi}_n = k\Psi_n \tag{41}$$

ein. Dabei ist Ψ_n eine geschätzte Lösungsfunktion und k ein konstanter Faktor, der so bestimmt wird, daß der Ansatz (41) eine möglichst gute Näherung liefert. Beispielsweise kann k, wie für eine ähnliche lautende Differentialgleichung *Hohenemser*[1] vorschlägt, aus der Bedingung ermittelt werden, daß das Integral der Fehlerquadrate über den von der Meridiankurve eingenommenen Bereich von ϑ_0 bis ϑ_1 zu einem Minimum wird. Mit (41) wird aus der zweiten Gleichung (39), wenn

$$\Delta\Psi_n = \int_0^{\vartheta}\int_0^{\xi} F_n\,\Psi_n\,d\xi\,d\xi + \Delta\bar{D}_n\vartheta + \Delta\bar{E}_n \tag{42}$$

gesetzt wird,

$$\Delta\bar{\Phi}_n = k\Delta\Psi_n\,. \tag{43}$$

[1] K. *Hohenemser*, Ing.-Arch. 8 (1937) S. 203.

Aus (40) folgt mit (43) die gegenüber $\bar{\Phi}_n$ verbesserte Funktion

$$\bar{\bar{\Phi}}_n = \Phi_{n0} - k \Delta \Psi_n . \tag{44}$$

Falls die Funktion $\bar{\Phi}_n$ mit der richtigen Lösung übereinstimmen würde, wäre

$$\bar{\bar{\Phi}}_n - \bar{\Phi}_n = 0 . \tag{45}$$

Da aber $\bar{\Phi}_n$ voraussetzungsgemäß nur eine Näherungslösung ist, wird (45) nicht erfüllt. Der sich ergebende Fehler f kann aus

$$f = \frac{\bar{\bar{\Phi}}_n - \bar{\Phi}_n}{\bar{\Phi}_n}$$

bestimmt werden. Mit (44) und (41) erhält man daraus die Fehlerkurve

$$f = \frac{\Phi_{n0} - k \Delta \Psi_n - k \Psi_n}{k \Psi_n} , \tag{46}$$

und das zu einem Minimum zu machende Integral der Fehlerquadrate ergibt sich somit zu

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left(\frac{\Phi_{n0} - k \Delta \Psi_n - k \Psi_n}{k \Psi_n} \right)^2 d\vartheta = \text{Min.} \tag{47}$$

Durch Nullsetzen des Differentialquotienten nach k erhält man schließlich

$$\mathrm{k} = \frac{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left(\frac{\Phi_{n0}}{\Psi_n} \right)^2 d\vartheta}{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\Phi_{n0}}{\Psi_n} d\vartheta + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\Delta \Psi_n}{\Psi_n} \frac{\Phi_{n0}}{\Psi_n} d\vartheta} . \tag{48}$$

Im Falle, daß an den Rändern die Funktion Φ_n verschwindet, wie es die Randbedingungen (38) vorschreiben, läßt sich k auch auf Grund des nachstehend beschriebenen Zusammenhanges ermitteln, wobei ein weiterer Vorteil der Differentialgleichung (24) zutage tritt.

Betrachtet man das Variationsproblem

$$\delta \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[\frac{1}{2} \Phi_n'^2 - \frac{1}{2} F_n \Phi_n^2 + q_n \Phi_n \right] d\vartheta = 0 \tag{49}$$

und bildet nach Vorschrift der Variationsrechnung

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[\Phi_n' \delta \Phi' - F_n \Phi_n \delta \Phi_n + q_n \delta \Phi_n \right] d\vartheta = 0 ,$$

so erhält man nach entsprechender Umformung des ersten Gliedes durch Teilintegration

$$\Phi_n'' + F_n \Phi_n - q_n - \left[\Phi' \delta \Phi_n \right]_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} = 0 .$$

Man erkennt, daß bei verschwindendem Funktionsverlauf am Rande gemäß (38) die eckige Klammer zu Null wird, und daß damit die übrigbleibende Differentialgleichung — die *Eulers*che Differentialgleichung des Variationsproblems — gerade mit der Differentialgleichung (24) übereinstimmt. Es lassen sich jetzt alle für Variationsprobleme entwickelten Näherungsverfahren zur Bestimmung der hier als Extremalen erscheinenden Funktion Φ_n anwenden.

Im nächsten Abschnitt soll das weiter oben erwähnte Approximationsverfahren in Verbindung mit dem aus der Kenntnis des zugehörigen Variationsproblems zu ziehenden Vorteil an Hand eines Beispiels näher erläutert werden.

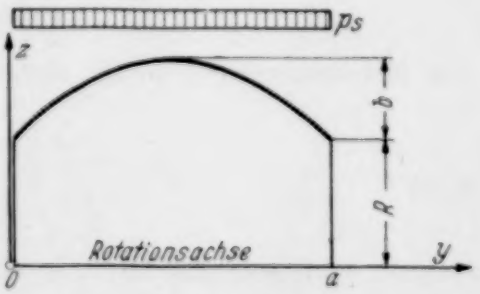

Abb. 3. Meridianschnitt der als Beispiel gewählten Schale.

8. Beispiel. a) Gewählte Schalenform. Als Beispiel soll eine Schale gemäß Abb. 3 behandelt werden, deren Meridian zwischen zwei aussteifenden Binderscheiben gespannt und durch den Ausdruck

$$z = R + b \sin \frac{\pi y}{a} \tag{50}$$

gegeben ist, wobei $0 \leqq y \leqq a$.

Mit den dimensionslosen Größen

$$\eta = \frac{y}{a}, \qquad \zeta = \frac{z}{R} \tag{51}$$

und der Bezeichnung

$$\varrho = \frac{b}{R} \tag{52}$$

erhält man für die Meridiankurve (50)

$$\zeta = 1 + \varrho \sin \pi\eta \qquad (0 \leqq \eta \leqq 1). \tag{53}$$

Die später benötigte erste und zweite Ableitung folgt daraus zu

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \pi\xi \cos \pi\eta, \qquad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = -\pi^2 \varrho \sin \pi\eta. \tag{54}$$

b) Gewählte Belastung. Als Belastung der Schale werde Schnee gewählt, den man als konstante Last je Flächeneinheit der Horizontalprojektion der Schalenmittelfläche anzunehmen pflegt. Wird mit p_s die Schneelast je Flächeneinheit der Horizontalprojektion bezeichnet und die Richtung $\varphi = 0$ in die Vertikale gelegt, so ergeben sich die reduzierten Belastungskomponenten zu

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_\varphi &= p_s \cos\varphi \sin\varphi = p_s \sin 2\varphi, \\ \bar{p}_\vartheta &= 0, \\ \bar{p}_\nu &= -p_s \cos^2\varphi = -\frac{p_s}{2}(1 + \cos 2\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Die Schneebelastung setzt sich danach gemäß (10) aus den beiden folgenden Belastungsfällen zusammen:

Belastungsfall I (Lastfall A für $n = 0$):

$$\bar{p}_{\varphi 0} = a_{\varphi 0} = 0, \quad \bar{p}_{\vartheta 0} = a_{\vartheta 0} = 0, \quad \bar{p}_{\nu 0} = a_{\nu 0} = -\frac{p_s}{2}. \tag{56}$$

Belastungsfall II (Lastfall A für $n = 2$):

$$\bar{p}_{\varphi 2} = \frac{p_s}{2} \sin 2\varphi, \quad \bar{p}_{\vartheta 2} = 0, \quad \bar{p}_{\nu 2} = -\frac{p_s}{2} \cos 2\varphi \tag{57}$$

oder

$$a_{\varphi 2} = \frac{p_s}{2}, \quad a_{\vartheta 2} = 0, \quad a_{\nu 2} = -\frac{p_s}{2}. \tag{58}$$

c) Integration der Differentialgleichung. Die Schnittkräfte für den Belastungsfall I nach (56) ergeben sich wegen der Drehsymmetrie mühelos. Auf ihre Darstellung im einzelnen kann hier verzichtet werden; es soll vielmehr sofort auf den allein interessierenden Belastungsfall II eingegangen werden.

Da die Meridiankurve durch die Darstellung $z = z(y)$ gegeben ist, kann die Differentialgleichung in der Form (28) benutzt werden. Nach (27) ist mit (54) und $n = 2$, wenn Punkte Ableitungen nach η kennzeichnen,

$$F_2(\eta) = 3\frac{\zeta''}{a^2\zeta} = -\frac{3\pi^2}{a^2}\frac{\sin\pi\eta}{1 + \varrho\sin\pi\eta}.$$

Das Belastungsglied ergibt sich nach (26) unter Berücksichtigung von (58) zu

$$q_{A_2} = -R\zeta\left(-2\frac{p_s}{2} - 4\frac{p_s}{2}\right) = 3\,R p_s \zeta. \tag{59}$$

Wird

$$3\,R a^2 p_s = \bar{p}_s$$

gesetzt, so lautet die Differentialgleichung für den hier zu behandelnden Fall

$$\Phi_2'' - \frac{3\pi^2 \varrho \sin\pi\eta}{1 + \varrho\sin\pi\eta}\Phi_2 = \bar{p}_s(1 + \varrho \sin \pi\eta). \tag{60}$$

Da wenig Aussicht besteht, die Lösung dieser Differentialgleichung auf analytischem Wege zu finden, soll sie numerisch integriert werden, wobei die in Ziff. 7 gemachten Ausführungen Verwendung finden sollen.

Gemäß (38) sind folgende Randbedingungen vorzuschreiben:

$$[\Phi_2]_{\eta=0} = 0, \qquad [\Phi_2]_{\eta=1} = 0. \tag{61}$$

Ausgehend von der Differentialgleichung (60) wird entsprechend (36) geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2^{\cdot} &= 3\,\pi^2\varrho\int_0^{\xi}\left[\frac{\sin\pi\xi}{1+\varrho\sin\pi\xi}\,\Phi_2+\bar{p}_s\,(1+\varrho\sin\pi\xi)\right]d\xi+D_2\,,\\ \Phi_2 &= 3\,\pi^2\varrho\int_0^{\eta}\int_0^{\xi}\left[\frac{\sin\pi\xi}{1+\varrho\sin\pi\xi}\,\Phi_2+\bar{p}_s\,(1+\varrho\sin\pi\xi)\right]d\xi\,d\xi+D_2\eta+E_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Das der Differentialgleichung (60) zugeordnete Variationsproblem läßt sich nach (49) in folgender Weise schreiben:

$$\delta\int_0^1\left[\frac{1}{2}\,\Phi_2^{\cdot 2}+\frac{3}{2}\,\pi^2\varrho\,\frac{\sin\pi\eta}{1+\varrho\sin\pi\eta}\,\Phi_2^2+\bar{p}_s(1+\varrho\sin\pi\eta)\,\Phi_2\right]d\eta=0\,. \tag{63}$$

Den Ausdrücken (39) entsprechen

$$\Phi_{20}=3\,\pi^2\varrho\int_0^{\eta}\int_0^{\xi}\bar{p}_s\,(1+\varrho\sin\pi\xi)\,d\xi\,d\xi+D_{20}\,\eta+E_{20} \tag{64}$$

und

$$\Delta\Phi_2=-\,3\,\pi^2\varrho\int_0^{\eta}\int_0^{\xi}\frac{\sin\pi\xi}{1+\varrho\sin\pi\xi}\,\Phi_2\,d\xi\,d\xi+\Delta D_2\eta+\Delta E_2\,, \tag{65}$$

worin die Integrationskonstanten D_{20}, E_{20}, ΔD_2, ΔE_2 aus den Randbedingungen zu bestimmen sind. Gleichung (40) lautet in diesem Fall

$$\Phi_2=\Phi_{20}-\Delta\Phi_2\,. \tag{66}$$

Nach (41) wird jetzt eine Näherungslösung

$$\bar{\Phi}_2=k\Psi_2 \tag{67}$$

eingeführt. Der Faktor k soll so gewählt werden, daß der in (63) variierte Integralausdruck einen stationären Wert annimmt. Führt man dementsprechend den Näherungsansatz (67) in (63) ein und bildet

$$\frac{\partial}{\partial k}\int_0^1\left[\frac{1}{2}\,\bar{\Phi}_2^{\cdot 2}+\frac{1}{2}\,3\,\pi^2\varrho\,\frac{\sin\pi\eta}{1+\varrho\sin\pi\eta}\,\bar{\Phi}_2^2+\bar{p}_s(1+\varrho\sin\pi\eta)\,\bar{\Phi}_2\right]d\eta=0\,,$$

so erhält man nach Durchführung der Differentiation und Auflösung nach k

$$k=-\frac{\bar{p}_s\int_0^1(1+\varrho\sin\pi\eta)\,\Psi_2\,d\eta}{\int_0^1\left(\Psi_2^{\cdot 2}+3\pi^2\varrho\,\frac{\sin\pi\eta\,\Psi_2^2}{1+\varrho\sin\pi\eta}\right)d\eta}\,. \tag{68}$$

Wird (67) in (65) eingeführt, so ergibt sich

$$\Delta\bar{\Phi}_2=k\,3\,\pi^2\varrho\int_0^{\eta}\int_0^{\xi}\frac{\sin\pi\xi}{1+\varrho\sin\pi\xi}\,\Psi_2\,d\xi\,d\xi+\Delta\bar{D}_2\eta+\Delta\bar{E}_2\,.$$

Nach (42) gilt

$$\Delta\Psi_2=-\,3\,\pi^2\varrho\int_0^{\eta}\int_0^{\xi}\frac{\sin\pi\xi}{1+\varrho\sin\pi\xi}\,\Psi_2\,d\xi\,d\xi+\Delta\bar{D}_2\eta+\Delta\bar{E}_2\,,$$

und man erhält gemäß (66) den gegenüber $\bar{\Phi}_2$ verbesserten Wert $\bar{\bar{\Phi}}_2$ zu

$$\bar{\bar{\Phi}}_2=\Phi_{20}-k\,\Delta\Psi_2\,. \tag{69}$$

Bei Auswahl einer ersten zu schätzenden Funktion Ψ_2 ist es naheliegend, es zunächst mit Φ_{20} nach (64) zu versuchen:

$$\Psi_2=\Phi_{20}\,.$$

Ausführung der Integration, die auf elementare Weise erfolgen kann, liefert mit den Randbedingungen (61)

$$\Psi_2=-\,\frac{1}{2}\,\bar{p}_s\left[\frac{2\varrho}{\pi^2}\sin\pi\eta+\eta\,(1-\eta)\right]. \tag{70}$$

Wenn man dies in (68) berücksichtigt, erhält man für den Faktor k folgende Formel:

$$k = \frac{\int_0^1 (1 + \varrho \sin \pi \eta) \left[\frac{2\varrho}{\pi^2} \sin \pi \eta + \eta(1-\eta) \right] d\eta}{\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2\varrho}{\pi} \cos \pi \eta - 2\eta + 1 \right)^2 d\eta + \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\pi^2 \varrho \sin \pi \eta}{1 + \varrho \sin \pi \eta} \left[\frac{2\varrho}{\pi^2} \sin \pi \eta + \eta(1-\eta) \right]^2 d\eta}, \tag{71}$$

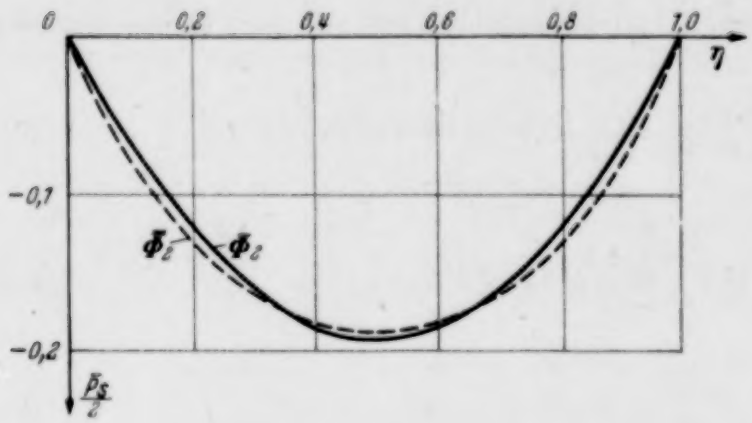

Abb. 4. Vergleich der Funktionen $\bar{\Phi}_2$ und $\bar{\bar{\Phi}}_2$.

Wird das Verhältnis $\varrho = b/R = 1$ gesetzt, und werden die Integrationen ausgeführt, was wohl am zweckmäßigsten auf numerischem Wege erfolgt, so erhält man den Wert

$$k = 0{,}425 .$$

In Abb. 4 sind $\bar{\Phi}_2 = k\Psi_2$ und $\bar{\Phi} = \Psi_2 - k\Delta\Psi_2$ übereinander aufgetragen. Aus den geringen Abweichungen der Kurven erkennt man, daß das Ergebnis nach (69) eine befriedigende Näherung für die Funktion Φ_2 darstellt, deren Genauigkeit für die Praxis im allgemeinen schon ausreichend sein dürfte.

Nachdem die Differentialgleichung des Problems auf diese Weise der Lösung zugeführt ist, bereitet die Ermittlung der Schnittkräfte keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten mehr und soll hier im einzelnen auch nicht verfolgt werden. Erwähnt sei lediglich noch, daß man selbstverständlich die verbesserte Funktion $\bar{\bar{\Phi}}_2$ zu verwenden hat und nicht etwa den ersten Näherungsansatz $\bar{\Phi}_2 = k\Psi_2$. Ferner ist die Ableitung der Funktion, die ja zur Bestimmung der Schubkräfte benötigt wird, durch Integration gemäß der ersten Gleichung (62) zu errechnen und nicht etwa durch Differentiation.

(Eingegangen am 28. Juni 1948.)

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. *Wolfgang Zerna*, 10 North Parade, Whitley Bay, Northumberland (England).

Ein Verfahren zur Lösung eindimensionaler Ausgleichsvorgänge.

Von K. Steinbuch.

1. Einleitung. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{1}$$

tritt unter verschiedenen physikalischen Auslegungen auf:

1. bei der Wärmeleitung (a^2 = Temperaturleitfähigkeit, v = Temperatur),
2. bei der Diffusion (a^2 = Diffusionskoeffizient, v = Konzentration),
3. bei der Reibung in laminar strömenden Flüssigkeiten, wenn die Geschwindigkeit nur von einer Koordinate abhängig ist (a^2 = kinematische Zähigkeit, v = Geschwindigkeit senkrecht zur x-Achse),
4. bei der Telegraphengleichung, wenn die Induktivität und Querableitung vernachlässigt werden können ($a^2 = 1/RC$, wobei R = Widerstand je Längeneinheit, C Kapazität je Längeneinheit, v = Spannung).

Das hier beschriebene Verfahren ist unter dem Zwang entstanden, bei einem technischen Problem (etwa von der Art des durchgeführten Beispiels) zahlenmäßige Angaben zu machen. Nachdem Lösungsversuche mit verschiedenen mathematischen Methoden zu keinem Ergebnis führten, entstand das Verfahren bei eingehender Beobachtung physikalischer Vorgänge. Es sei deshalb erlaubt, der Herleitung eine physikalische Anschauung zugrunde zu legen. Entsprechend der Entstehungsweise wird auf Fragen, die vom streng mathematischen Standpunkt aus wichtig erscheinen, weniger eingegangen. Das Verfahren leitet seine Berechtigung ab aus der Übereinstimmung mit Messungen sowie aus der sehr starken zahlenmäßigen Konvergenz. Seine Bedeutung liegt in der Anpassungsfähigkeit an die verschiedensten Randbedingungen.

Als Vorstellungshilfe wird die laminare Reibung in Flüssigkeiten herangezogen. Im Abschnitt **5** wird dann gezeigt, wie das Verfahren auf die anderen physikalischen Vorgänge angewandt werden kann.

Häufig treten folgende drei Randbedingungen auf, die gleichzeitig zu befriedigen sind:

Randbedingung (0): Für $t < 0$ ist das ganze System in Ruhe. Das „System" besteht aus einer unendlich ausgedehnten Ebene bei $x = 0$ (die dann entsprechend der Randbedingung (L) in sich geradlinig, also senkrecht zur x-Achse, verschoben wird), einer Flüssigkeitsschicht zwischen $x = 0$ und $x = x_1$, sowie einer „Wand" bei $x = x_1$ (siehe Randbedingung (R)).

Randbedingung (L): Zur Zeit $t = 0$ wird die Ebene $x = 0$ bewegt, und zwar so, daß entweder die Geschwindigkeit unstetig auf einen konstanten Wert v_0 überspringt (Anlauf) oder die Ebene ruckartig um die Strecke s_0 verschoben wird (Stoßvorgang). Das Verfahren liefert ebenso die Lösungen für die Fälle, in denen die Beschleunigung der Ebene $x = 0$ oder eine andere zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit unstetig einen konstanten Wert annimmt.

Randbedingung (R): Während zwischen $x = 0$ und $x = x_1$ sich eine zähe Flüssigkeit befindet, für welche die Differentialgleichung (1) gilt, befindet sich in dem Raum $x > x_1$ ein starres Medium, dessen Bewegungsgesetz durch seine Masse und die Schubkraft infolge der Flüssigkeitsreibung bestimmt ist. Wenn mit m seine Masse (je Flächeneinheit) und mit λ die dynamische Zähigkeit der Flüssigkeit bezeichnet wird, dann gilt

$$-\lambda \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_1} = m \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x=x_1}. \tag{R}$$

Bezüglich dieser Randbedingung (R) sind zwei Sonderfälle wichtig: Erstens $m = \infty$, das heißt, die Flüssigkeit grenzt bei $x = x_1$ an eine feste Wand

$$v(x_1) = 0; \tag{R_w}$$

zweitens $m = 0$, das heißt, bei $x = x_1$ befindet sich eine freie Oberfläche. Dann gilt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_1} = 0. \tag{R_f}$$

Lösungen der Differentialgleichung (1) bei Erfüllung der Randbedingungen (0) und (L), aber ohne (R), sind in der Literatur häufig angegeben[1]. Für den einfachen Sonderfall der Randbedingung (R_f) sind Lösungen bekannt[2]. Auch diese wurden mit einem Spiegelungsprinzip abgeleitet, wie es im folgenden angewandt und erweitert wird.

2. Das Verfahren, an einfachen Beispielen durchgeführt. Der Verlauf der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t und dem Ort x $(0<x<x_1)$ wird als Feldfunktion, der am Orte $x \geqq x_1$ als Grenzfunktion bezeichnet. Dabei ist die Grenzfunktion nur noch von t abhängig, nicht von x. Um das Verfahren verständlich zu machen, werden zunächst einige einfache Sonderfälle ohne Schematisierung durchgeführt.

Gegeben sei eine ruhende Flüssigkeitsschicht zwischen $x=0$ und $x=x_1$, die bei $x=x_1$ eine freie Oberfläche hat. Beginnend zur Zeit $t=0$ wird die Begrenzung bei $x=0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 bewegt. Am Anfang – kleine t – wird sich die Feldfunktion so verhalten, wie wenn die Schicht unendlich dick wäre, und man kann die für diesen Fall übliche und bekannte Lösung

$$v = v_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] = -v_0 \Phi^0\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{2}$$

als erste Näherung ansetzen. Dabei bedeutet

$$\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2}\, dy \tag{3}$$

das normierte Fehlerintegral und

$$\Phi^0\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \equiv \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - 1\,. \tag{4}$$

Die im folgenden häufig auftretenden Ableitungen des Fehlerintegrals werden durch hochgestellte römische Indizes gekennzeichnet und sind in der Tabelle 3 ausführlich zusammengestellt.

Die Näherung (2) hat für $x=x_1$ einen Gradienten der Geschwindigkeit

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_1} = -v_0 \frac{1}{2a\sqrt{t}}\, \Phi^I\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{5}$$

Ein solcher Gradient bedeutet eine Schubkraft, wie sie an einer freien Oberfläche nicht auftreten kann. Deshalb wird der Feldfunktion (2) eine Geschwindigkeitsverteilung $v^{(1)}$ überlagert, die diesen Gradienten zu Null macht

$$v^{(1)} = -v_0 \Phi^0\left(\frac{2x_1 - x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

Da diese Korrektur an der Feldfunktion durch Spiegelung an der Ebene x_1 aus ihr entsteht, wird das Verfahren als Spiegelungsverfahren bezeichnet. Nun ist aber für $x=0$ nicht mehr $v=v_0$, sondern

$$v_{x=0} + v^{(1)}_{x=0} = v_0 \left[1 - \Phi^0\left(\frac{2x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{7}$$

Um hier wieder die Bedingung $v_{x=0}=v_0$ zu erfüllen, wird eine weitere Korrektur angebracht

$$v^{(2)} = v_0 \Phi^0\left(\frac{2x_1 + x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{8}$$

Auch diese kann man sich wieder durch Spiegelung der vorhergehenden an der Ebene $x=0$ entstanden denken. Die Fortsetzung des Verfahrens ist leicht zu überblicken: Um die Schubkraft von $v^{(2)}$ bei x_1 zu kompensieren, wird

$$v^{(3)} = +v_0 \Phi^0\left(\frac{4x_1 - x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{9}$$

hinzugefügt, um bei $x=0$ wieder v_0 zu bekommen,

$$v^{(4)} = -v_0 \Phi^0\left(\frac{4x_1 + x}{2a\sqrt{t}}\right), \tag{10}$$

---

[1] *Frank-Mises*, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Bd. 2, Wärmeleitung und Diffusion. Braunschweig 1927.

[2] Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1903 u. 1923. Bd. V, 4. Wärmeleitung von *E. W. Hobson* und *H. Diesselhorst*, Seite 189–190, 222.

und man erhält hier das leicht zu durchschauende Entwicklungsgesetz

$$v = v_0 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} (-1)^{\alpha} \left[\Phi^0 \left(\frac{2(\alpha-1)x_1 + x}{2a\sqrt{t}} \right) + \Phi^0 \left(\frac{2\alpha x_1 - x}{2a\sqrt{t}} \right) \right]. \tag{11}$$

Bei der zahlenmäßigen Auswertung dieser Reihe zeigt sich, daß sie außerordentlich stark konvergiert. Berechnet man z. B. (durch Interpolation) aus (11) die Zeit, für welche bei $x = x_1$ die Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2} v_0$ ist, so fallen alle Glieder mit Ausnahme der beiden ersten $-\Phi^0\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi^0\left(\frac{3x_1}{2a\sqrt{t}}\right)$ unter die Genauigkeit sechsstelliger Tafeln[1]. Man erhält $v(x_1) = \frac{1}{2} v_0$ für $t = 0{,}380_0\, x_1^2/a^2$. Für sehr große t ist die Konvergenz nicht ganz so gut, doch macht dies praktisch wenig aus, weil sich dann v asymptotisch dem Grenzwert v_0 nähert.

Mit dem Prinzip der Spiegelung läßt sich auch die Lösung für die Randbedingung (R_w) in geschlossener Form darstellen. (Bei $x = x_1$ befindet sich also eine feste Wand.) Wiederum wird von (2) ausgegangen

$$v = -v_0 \Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

Um die Randbedingung (R_w), $v(x_1) = 0$, zu erfüllen, wird überlagert

$$v^{(1)} = +v_0 \Phi^0 \left(\frac{2x_1 - x}{2a\sqrt{t}} \right). \tag{12}$$

Nun muß bei $x = 0$ wieder $v = v_0$ hergestellt werden:

$$v^{(2)} = -v_0 \Phi^0 \left(\frac{2x_1 + x}{2a\sqrt{t}} \right). \tag{13}$$

Das Entwicklungsgesetz ist leicht zu durchschauen:

$$v = v_0 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left[\Phi^0 \left(\frac{2\alpha x_1 - x}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi^0 \left(\frac{2(\alpha-1)x_1 + x}{2a\sqrt{t}} \right) \right]. \tag{14}$$

Auch hier findet man dieselbe starke Konvergenz der Reihe bis auf sehr große Zeiten. Für diese kann man jedoch den (asymptotisch erreichten) Ansatz des stationären Zustandes machen:

$$v = v_0 \frac{x_1 - x}{x_1}. \tag{15}$$

Bisher wurde als Randbedingung (L) angenommen, daß zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit v an der Stelle $x = 0$ von dem Wert Null auf den Wert v_0 überspringt (Anlaufproblem). Ebenso leicht läßt sich mit dem Verfahren auch der Fall behandeln, daß zur Zeit $t = 0$ die Ebene $x = 0$ ruckartig um die Strecke s_0 verschoben wird (Stoßproblem). Da die Differentialgleichung (1) linear und homogen ist, stellt die Summe zweier Lösungen selbst wieder eine Lösung dar. Wenn man nun, beginnend zur Zeit $t = 0$ den Ansatz $v = -v_0 \Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$ des Anlaufs macht, und diesem, zur Zeit $t = \Delta t$ beginnend, einen entgegengesetzt gleichen überlagert, so hat man insgesamt die Ebene $x = 0$ um die Strecke $s_0 = \Delta t \cdot v_0$ verschoben und erhält als Feldfunktion

$$v = -v_0 \Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + v_0 \Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t - \Delta t}} \right).$$

Mit

$$\Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t - \Delta t}} \right) = \Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$$

wird daraus

$$v = -s_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi^0 \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right). \tag{16}$$

Mit den Ausdrücken von Tabelle 3 gibt dies

$$v = +s_0 \frac{x}{4at^{3/2}} \Phi^I \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \equiv -\frac{s_0}{4t} \Phi^{II} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right). \tag{16a}$$

Diese Feldfunktion stellt eine von $x = 0$ nach $x \longrightarrow \infty$ laufende „Welle" mit stark abnehmender Amplitude und Geschwindigkeit dar. Die größte Geschwindigkeit zu einer gegebenen Zeit ergibt sich aus

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{s_0}{4t} \frac{1}{2a\sqrt{t}} \Phi^{III} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \equiv -\frac{s_0}{8at^{3/2}} \Phi^I \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \left(\frac{x^2}{a^2 t} - 2 \right)$$

[1] Z. B. *E. Jahnke* und *F. Emde*, Funktionstafeln. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1938.

an dem Orte

$$x_{v\max} = a\sqrt{2t}\ . \tag{17}$$

Hier wird die Geschwindigkeit

$$v_{\max} = -\frac{s_0}{4t}\Phi^{II}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}2419_5\,\frac{s_0}{t}\ . \tag{18}$$

Die höchste Geschwindigkeit an einem festen Ort erhält man aus

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 = -\frac{s_0}{4}\left[-\frac{1}{t^2}\Phi^{II}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{t}\left(-\frac{x}{4at^{3/2}}\right)\Phi^{III}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

zur Zeit

$$t_{v\max} = \frac{x^2}{6a^2}\ , \tag{19}$$

nämlich

$$v_{\max} = s_0\frac{a^2}{x^2}\,\frac{3}{2}\,\Phi^{II}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}9246\,s_0\frac{a^2}{x^2}\ . \tag{20}$$

Aus (16) ergeben sich die Verrückungen, welche die Flüssigkeitsteilchen erfahren, zu

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left[-s_0\Phi^0\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]dt = -s_0\Phi^0\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \tag{21}$$

also für $t \longrightarrow \infty$

$$s_{t\to\infty} = s_0\ . \tag{22}$$

Das heißt, sämtliche Flüssigkeitsteilchen machen letzten Endes die Verschiebung der Ebene $x=0$ in ihrer vollen Größe mit.

Mit dieser ursprünglichen Feldfunktion (16) lassen sich alle Maßnahmen, die zu den Gleichungen (5) bis (14) führten, wiederholen. Überall tritt an die Stelle von v_0 die Verrückung s_0 und an die Stelle des Fehlerintegrals seine zeitliche Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi^0\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{4t}\Phi^{II}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

So erhält man für den Stoßvorgang bei freier Oberfläche [entsprechend (11)]

$$v = s_0\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}(-1)^\alpha\left[\Phi^0\left(\frac{2(\alpha-1)x_1+x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi^0\left(\frac{2\alpha x_1-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right], \tag{23}$$

für den Stoßvorgang bei einer starren Wand [entsprechend (14)]

$$v = s_0\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left[\Phi^0\left(\frac{2\alpha x_1-x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi^0\left(\frac{2(\alpha-1)x_1+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{24}$$

3. Erweiterung des Spiegelungsverfahrens auf die allgemeine Randbedingung (R). Nachdem in diesen einfachen Beispielen (Sonderfälle der Randbedingung (R)) das Spiegelungsprinzip ausführlich angewandt wurde, muß man jetzt das Verfahren schematisieren, um die bei der allgemeinen Randbedingung (R) wesentlich zunehmende Rechenarbeit in erträglichen Grenzen zu halten.

Durch Vergleich von (2) und (16) erkennt man, daß das Problem — ohne (R) — gelöst wird durch eine Funktion

$$F^\alpha(2\beta x_1 \pm x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\Phi^0\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{25}$$

Dabei ist festzuhalten, daß $F^\alpha(2\beta x_1 \pm x)$ auch eine Funktion von t ist, wenn dieses auch nicht angeschrieben ist. Beim Anlauf war $\alpha=0$, beim Stoß $\alpha=1$. Auch mit $\alpha=2$ erhält man eine physikalisch durchaus sinnvolle Bedeutung: die Ebene $x=0$ wird um die Strecke s_0 ruckartig vorwärts und nach der Zeit Δt ebenso wieder zurückbewegt; dabei soll $\Delta t \longrightarrow 0$ gehen, s_2 aber in dem Maß wachsen, daß $s_2\,\Delta t$ endlich bleibt. Auch negative Exponenten treten auf:

$$F^{-\alpha}(2\beta x_1 \pm x) = \underbrace{\int\int\cdots\cdots\int}_{\alpha}\Phi^0\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)\underbrace{dt\,dt\ldots dt}_{\alpha}\ . \tag{25a}$$

F^{-1} beschreibt den Vorgang, daß die Ebene $x=0$ mit konstanter Beschleunigung bewegt wird; F^{-2} den Vorgang, daß die zweite Ableitung der Geschwindigkeit konstant ist, usw.

Aus der Randbedingung (R) erhält man durch Umstellen und Integration

$$v(x_1) = -\frac{\lambda}{m}\int_0^t \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_1} dt .$$

Durch diese Operation erhält man aus der Feldfunktion v die Grenzfunktion $v(x_1)$ infolge ihres durch die Reibung übertragenen Impulses. Da sie sehr häufig angewandt wird, sei ein Operator ψ derartig definiert, daß

$$\psi(v)_{x=x_1} = -\frac{\lambda}{m}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}(v)_{x=x_1}\, dt$$

oder mit (25)

$$\psi\left(F^\alpha(2\beta x_1 \pm x)\right) = -\frac{\lambda}{m}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} F^\alpha(2\beta x_1 \pm x)\, dt \tag{26}$$

ist. Damit wird

$$v(x_1) = \psi(v)_{x=x_1} \tag{26a}$$

Für ψ ergeben sich aus der Definition und aus (1) folgende Rechenregeln:

$$\psi\psi F^\alpha = \psi^2 F^\alpha = \frac{\lambda^2}{m^2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} F^\alpha\, dt\, dt = \frac{\lambda^2}{m^2}\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^2}\, dt\, dt = \frac{\lambda^2}{m^2 a^2}\int_0^t F^\alpha\, dt$$

oder

$$\psi^2 F^\alpha = K^2 F^{\alpha-1} \tag{27}$$

mit

$$K = \frac{\lambda}{ma} \tag{28}$$

Ferner sind folgende Vorzeichenregeln zu beachten:

$$\psi F^\alpha(2\beta x_1 + x)_{x=0} = -\psi F^\alpha(2\beta x_1 - x)_{x=0} , \tag{29}$$

$$\psi^2 F^\alpha(2\beta x_1 + x)_{x=0} = +\psi^2 F^\alpha(2\beta x_1 - x)_{x=0} . \tag{30}$$

Mit der Einführung der Symbole F^α und ψ ist das Werkzeug zur schematischen Durchführung des Spiegelungsprinzips geschaffen. Weiter unten werden die entstehenden Ausdrücke ψF^α, $\psi^2 F^\alpha$ usw. auf tabellierte Funktionen zurückgeführt, zunächst erscheinen sie nur in ihrer impliziten Form. In Analogie zu (2) und (16) wird als primäre Feldfunktion benutzt

$$v = -C F^\alpha(x). \tag{31}$$

Gemäß (26a) erhält man zu dieser Feldfunktion die zugehörige Grenzfunktion

$$v(x_1) = -C\psi F^\alpha(x_1) . \tag{31a}$$

Dieser Wert $v(x_1)$ ist aber nicht identisch mit dem, der sich aus der Feldfunktion (31) durch Einsetzen von $x = x_1$ ergibt. Doch so wie oben (z. B. (6)) ein Verstoß gegen die Randbedingung (R) durch eine gespiegelte Welle kompensiert wurde, so wird auch hier an der Feldfunktion eine Korrektur $v^{(1)}$ angebracht

$$v^{(1)} = C\left[\psi F^\alpha(2x_1 - x) + F^\alpha(2x_1 - x)\right] . \tag{31b}$$

Unter Beachtung der Vorzeichenregel (29) erkennt man, daß sich für $x = x_1$, aus $v + v^{(1)}$ tatsächlich derselbe Wert wie aus (31a) errechnet. Mit diesem Ausdruck $v + v^{(1)}$ für die Feldfunktion wird aber sowohl gegen (R) als auch gegen (L) verstoßen. Um (L) wieder zur erfüllen, wird als nächste Spiegelung unter Beachtung der Vorzeichenregel gewählt

$$v^{(2)} = C\left[\psi F^\alpha(2x_1 + x) - F^\alpha(2x_1 + x)\right] . \tag{31c}$$

Nun ist (L) wieder erfüllt:

$$v(0) + v^{(1)}(0) + v^{(2)}(0) = C F^\alpha(0) .$$

Um (R) wieder einzuhalten, muß die Schubkraft der beiden letzten Spiegelungen $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ berücksichtigt werden. Man erhält durch Anwendung des Operators ψ auf $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ eine Korrektur der Grenzfunktion

$$\Delta_{12} v_1 = \psi(v^{(1)} + v^{(2)}) = C\left[\psi^2 F^\alpha(x_1) + \psi^2 F^\alpha(3x_1) - \psi F^\alpha(x_1) - \psi F^\alpha(3x_1)\right] . \tag{31d}$$

Dieser neue Wert der Grenzfunktion $v_1 + \Delta_{12} v_1$ ist aber wiederum nicht identisch mit dem, der sich aus $v + v^{(1)} + v^{(2)}$ durch Einsetzen von $x = x_1$ ergibt. Dieselbe Überlegung, die oben auf $v^{(1)}$ führte, bringt nun als nächste Spiegelung

$$v^{(3)} = C\left[\psi^2 F^\alpha(2x_1 - x) + \psi^2 F^\alpha(4x_1 - x) + \psi F^\alpha(2x_1 - x) + 2\psi F^\alpha(4x_1 - x) + F^\alpha(4x_1 - x)\right] . \tag{31e}$$

So zeichnet sich das Verfahren als eine mechanische Wiederholung folgender drei Takte ab:

a) Durch den Vorgang, den die Randbedingung (L) beschreibt, läuft eine „Welle" von $x=0$ bis $x=x_1$.
Argument der F^{α}: $x,\ 2x_1+x,\ 4x_1+x,\ \ldots$.
[siehe z. B. (2), (16), (31), (31c)].

b) Diese „Welle" (und evt. ihre Vorgängerin) bewirken durch ihre Schubkraft (Operator ψ) eine Korrektur an der Grenzfunktion [z. B. (31d)],
$$\Delta_{12}\, v_1 = \psi(v^{(1)}+v^{(2)}),$$
$$\Delta_{34}\, v_1 = \psi(v^{(3)}+v^{(4)}) \text{ usw.}$$

c) Die korrigierte Grenzfunktion fügt sich nicht stetig in die Feldfunktion ein. Die Differenz wird durch die nächste Spiegelung, eine von x_1 nach $x=0$ laufende „Welle" behoben.
Argument der F^{α}: $2x_1-x,\ 4x_1-x,\ 6x_1-x,\ \ldots$.
[siehe z. B. (6), (9), (12), (31b)].

Schematisch
$$v^{(1)} = v_1 - v$$
$$v^{(3)} = \Delta_{12}\, v_1 - v^{(2)}$$
$$v^{(5)} = \Delta_{34}\, v_1 - v^{(4)} \text{ usw.}$$

Die in folgender Tabelle 1 angeschriebenen Spiegelungen dürften bei der starken Konvergenz des Verfahrens zur zahlenmäßigen Berechnung praktisch vorkommender Aufgaben im allgemeinen ausreichen; auch führen die höheren Näherungen — so leicht sie implizit zu gewinnen sind — zu explizit sehr unhandlichen Ausdrücken.

Tabelle 1.

Feldfunktionen:

$$\frac{v}{C} = -F^{\alpha}(x)$$

$$\frac{v^{(1)}}{C} = +\psi F^{\alpha}(2x_1-x) + F^{\alpha}(2x_1-x)$$

$$\frac{v^{(2)}}{C} = +\psi F^{\alpha}(2x_1+x) - F^{\alpha}(2x_1+x)$$

$$\frac{v^{(3)}}{C} = +\psi^2 F^{\alpha}(2x_1-x)+\psi^2 F^{\alpha}(4x_1-x)+\psi F^{\alpha}(2x_1-x)+2\psi F^{\alpha}(4x_1-x)+F^{\alpha}(4x_1-x)$$

$$\frac{v^{(4)}}{C} = -\psi^2 F^{\alpha}(2x_1+x)-\psi^2 F^{\alpha}(4x_1+x)+\psi F^{\alpha}(2x_1+x)+2\psi F^{\alpha}(4x_1+x)-F^{\alpha}(4x_1+x)$$

$$\begin{aligned}\frac{v^{(5)}}{C} = &+\psi^3 F^{\alpha}(2x_1-x)+2\psi^3 F^{\alpha}(4x_1-x)+\psi^3 F^{\alpha}(6x_1-x)\\ &+\psi^2 F^{\alpha}(2x_1-x)+4\psi^2 F^{\alpha}(4x_1-x)+3\psi^2 F^{\alpha}(6x_1-x)\\ &+2\psi F^{\alpha}(4x_1-x)+3\psi F^{\alpha}(6x_1-x)\\ &+F^{\alpha}(6x_1-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{v^{(6)}}{C} = &+\psi^3 F^{\alpha}(2x_1+x)+2\psi^3 F^{\alpha}(4x_1+x)+\psi^3 F^{\alpha}(6x_1+x)\\ &-\psi^2 F^{\alpha}(2x_1+x)-4\psi^2 F^{\alpha}(4x_1+x)-3\psi^2 F^{\alpha}(6x_1+x)\\ &+2\psi F^{\alpha}(4x_1+x)+3\psi F^{\alpha}(6x_1+x)\\ &-F^{\alpha}(6x_1+x)\end{aligned}$$

Grenzfunktionen:

$$\frac{v_1}{C} = -\psi F^{\alpha}(x_1)$$

$$\frac{\Delta_{12}v_1}{C} = +\psi^2 F^{\alpha}(x_1)+\psi^2 F^{\alpha}(3x_1)-\psi F^{\alpha}(x_1)-\psi F^{\alpha}(3x_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_{34}v_1}{C} = &-\psi^3 F^{\alpha}(x_1)-2\psi^3 F^{\alpha}(3x_1)-\psi^3 F^{\alpha}(5x_1)\\ &+\psi^2 F^{\alpha}(x_1)+3\psi^2 F^{\alpha}(3x_1)+2\psi^2 F^{\alpha}(5x_1)\\ &-\psi F^{\alpha}(3x_1)-\psi F^{\alpha}(5x_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_{56}v_1}{C} = &+\psi^4 F^{\alpha}(x_1)+2\psi^4 F^{\alpha}(3x_1)+3\psi^4 F^{\alpha}(5x_1)+\psi^4 F^{\alpha}(7x_1)\\ &-\psi^3 F^{\alpha}(x_1)-3\psi^3 F^{\alpha}(3x_1)-7\psi^3 F^{\alpha}(5x_1)-3\psi^3 F^{\alpha}(7x_1)\\ &+\psi^2 F^{\alpha}(3x_1)+5\psi^2 F^{\alpha}(5x_1)+3\psi^2 F^{\alpha}(7x_1)\\ &-\psi F^{\alpha}(5x_1)-\psi F^{\alpha}(7x_1)\end{aligned}$$

Zur Anwendung der Tabelle 1 sei klar gesagt: Soll die Feldfunktion berechnet werden, dann addiert man von den unter „Feldfunktionen" angeschriebenen Ausdrücken soviel $v+v^{(1)}+v^{(2)}+v^{(3)}+\ldots$, als man nach der erwünschten Genauigkeit zu brauchen glaubt; praktisch

Tabelle 2.

	x	x_1	$2x_1-x$	$2x_1+x$	$3x_1$	$4x_1-x$	$4x_1+x$	$5x_1$	$6x_1-x$	$6x_1+x$	$7x_1$	$8x_1-x$	$8x_1+x$	$9x_1$
v	-1													
v_1		$-\psi$												
$v^{(1)}$			$+\psi+1$											
$v^{(2)}$				$+\psi-1$										
$\Delta_{12}v_1$		$+\psi^2-\psi$			$+\psi^2-\psi$									
$v^{(3)}$			$+\psi^2+\psi$			$+\psi^2+2\psi+1$								
$v^{(4)}$				$-\psi^2+\psi$			$-\psi^2+2\psi-1$							
$\Delta_{34}v^{(1)}$		$-\psi^3+\psi^2$			$-2\psi^3+3\psi^2-\psi$			$-\psi^3+2\psi^2-\psi$						
$v^{(5)}$			$+\psi^3+\psi^2$			$+2\psi^3+4\psi^2+2\psi$			$\psi^3+3\psi^2+3\psi+1$					
$v^{(6)}$				$+\psi^3-\psi^2$			$2\psi^3-4\psi^2+2\psi$			$+\psi^3-3\psi^2+3\psi-1$				
$\Delta_{56}v_1$		$+\psi^4-\psi^3$			$2\psi^4-3\psi^3+\psi^2$			$3\psi^4-7\psi^3+5\psi^2-\psi$			$+\psi^4-3\psi^3+3\psi^2-\psi$			
$v^{(7)}$			$+\psi^4+\psi^3$			$2\psi^4+4\psi^3+2\psi^2$			$-3\psi^4+9\psi^3+9\psi^2+3\psi$			$\psi^4+4\psi^3+6\psi^2+4\psi+1$		
$v^{(8)}$				$-\psi^4+\psi^3$			$-2\psi^4+4\psi^3-2\psi^2$			$-3\psi^4+9\psi^3-9\psi^2+3\psi$			$-\psi^4+4\psi^3-6\psi^2+4\psi-1$	
$\Delta_{78}v_1$		$-\psi^5+\psi^4$			$-3\psi^5+5\psi^4-2\psi^3$			$-5\psi^5+13\psi^4-11\psi^3+4\psi^2$			$-4\psi^5+13\psi^4-15\psi^3+7\psi^2-\psi$			$-\psi^5+4\psi^4-6\psi^3+4\psi^2-\psi$

kommt es darauf heraus, daß man schon nach drei oder vier Gliedern unterhalb der Genauigkeit der Tabellierung ist. Entsprechend berechnet man die Grenzfunktion $v_1+\Delta_{12}v_1+\Delta_{34}v_1+\dots$

Aus der Tabelle 1 erkennt man, daß es sich bei dem Verfahren lediglich um die Bestimmung der Koeffizienten handelt, mit welchen die Potenzen des Operators ψ auf die verschiedenen Argumente (x_1, $2x_1-x$, $2x_1+x$, $3x_1$, 4_1x-x, usw.) in den einzelnen Spiegelungen v, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ usw., sowie in den Korrekturen $\Delta_{12}v_1$, $\Delta_{34}v_1$ usw. auftreten. In der vorstehenden Tabelle 2 sind diese schematisch dargestellt. Bemerkenswert ist, daß bei dieser Darstellung in der Hauptdiagonale die Binomialkoeffizienten auftreten.

Zur zahlenmäßigen Auswertung des Verfahrens müssen die Funktionen $\psi^n F^n$ noch explizit dargestellt werden. Zu ihrer Berechnung werden die Ausdrücke der Tabelle 3 benutzt.

Tabelle 3.

$$\Phi^0(\xi) = \Phi(\xi)-1 \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\varphi^2}\,d\varphi$$

$$\Phi^I(\xi) = \frac{d}{d\xi}\Phi^0(\xi) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\xi^2}$$

$$\Phi^{II}(\xi) = \frac{d^2}{d\xi_2}\Phi^0(\xi) \equiv -2\,\xi\,\Phi^I(\xi) \equiv K_2\,\Phi^I(\xi)$$

$$\Phi^{III}(\xi) = \frac{d^3}{d\xi^3}\Phi^0(\xi) \equiv (4\,\xi^2-2)\,\Phi^I(\xi) \equiv K_3\,\Phi^I(\xi)$$

$$\Phi^{IV}(\xi) = (-8\,\xi^3+12\,\xi)\,\Phi^I(\xi) \equiv K_4\,\Phi^I(\xi)$$

$$\Phi^{V}(\xi) = (16\,\xi^4-48\,\xi^2+12)\,\Phi^I(\xi) \equiv K_5\,\Phi^I(\xi)$$

$$\Phi^{VI}(\xi) = (-32\,\xi^5+160\,\xi^3-120\,\xi)\,\Phi^I(\xi) \equiv K_6\,\Phi^I(\xi)$$

$$\Phi^{VII}(\xi) = (64\,\xi^6-480\,\xi^4+600\,\xi^2-120)\,\Phi^I(\xi) \equiv K_7\,\Phi^I(\xi) \quad \text{usw.}$$

Die Klammerausdrücke K_α sind bis auf die entgegengesetzten Vorzeichen der geradzahligen K_α mit den entsprechenden Hermiteschen Polynomen identisch und gehorchen der Rekursionsformel

$$K_{\alpha+1} = \frac{d\,K_\alpha}{d\,\xi} - 2\,\xi\,K_\alpha\,.$$

Tabelle 4.

$$F^2 = +\frac{1}{16\,t^2}\,\Phi^{IV}\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\psi F^2 = \mp K\,\frac{1}{8\,t^{3/2}}\,\Phi^{III}\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right) \qquad \left(\text{Abkürzung } K=\frac{\lambda}{ma}\right)$$

$$\psi^2 F^2 = K^2 F^1 = +K^2\,\frac{1}{4\,t}\,\Phi^{II}\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\psi^3 F^2 = K^2\psi F^1 = \pm K^3\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\Phi^{I}\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\psi^4 F^2 = K^2\psi^2 F^1 = K^4 F^0 = +K^4\,\Phi^0\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\psi^5 F^2 = K^2\psi^3 F^1 = K^4\psi F^0 = \mp K^5\left[\frac{2\beta x_1 \pm x}{a}\,\Phi^0\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right) + \sqrt{t}\,\Phi^I\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

$$\psi^6 F^2 = K^2\psi^4 F^1 = K^4\psi^2 F^0 = +K^6\left[\left(t+\frac{(2\beta x_1 \pm x)^2}{2a^2}\right)\Phi^0\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right) - \frac{t}{2}\,\Phi^{II}\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

$$\psi^7 F^2 = K^2\psi^5 F^1 = K^4\psi^3 F^0 = \mp K^7\left[\left(\frac{(2\beta x_1 \pm x)^3}{6a^3}+\frac{t(2\beta x_1 \pm x)}{a}\right)\Phi^0\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{2t(2\beta x_1 \pm x)}{3a} + \frac{2at^2}{3(2\beta x_1 \pm x)}\right)\Phi^{II}\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

$$\psi^8 F^2 = K^2\psi^6 F^1 = K^4\psi^4 F^0 = +K^8\left[\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t(2\beta x_1 \pm x)^2}{2a^2}+\frac{(2\beta x_1 \pm x)^4}{a^4}\right)\Phi^0\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{5t^2}{12}+\frac{t(2\beta x_1 \pm x)^2}{24a^2}\right)\Phi^{II}\left(\frac{2\beta x_1 \pm x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

4. Erweiterung des Verfahrens auf eine beliebige Randbedingung (L). Bei den bisherigen Ableitungen wurde die Voraussetzung gemacht, daß (L) aus einem einmaligen, unstetigen Sprung von $\partial v/\partial t$, v, $\int v\,dt$ usw. an der Stelle $x=0$ zur Zeit $t=0$ besteht. Mit den bisherigen Methoden kann die daraus resultierende Feldfunktion $v(x,t)$ oder Grenzfunktion $v_1(t)$ mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Wenn nun eine beliebige andere Randbedingung (L) $V_{t=e}$ analytisch oder empirisch gegeben ist, so kann diese — analytisch oder graphisch — in ein Integral oder eine Summe von Einzelstößen aufgelöst werden, und man erhält die Gesamtlösung als eine Überlagerung der Auswirkungen der Einzelstöße:

$$v_{\text{allgemein}}(x,t) = \int_{e=0}^{e=t} V(e)\, v_{\text{Einzelstoß}}(x,t-e)\,de\,. \tag{32}$$

Die sich hieraus ergebenden Integrale werden einer geschlossenen Integration im allgemeinen nicht zugänglich sein; dagegen ist die graphische Auswertung der Summe

$$v_{\text{allgemein}}(x,t) = \sum_{n=0}^{n=t/\Delta e} V(n\,\Delta e)\, v_{\text{Einzelstoß}}(x,t-n\,\Delta e) \tag{32a}$$

stets leicht möglich.

5. Bemerkungen zur Anwendung des Verfahrens. Wenn auch bei der Ableitung immer wieder von hydrodynamischen Vorstellungen Gebrauch gemacht wurde, so kann doch das mathematische Schema in genau derselben Weise auf Probleme der Wärmeleitung, Diffusion und Telegraphengleichung angewandt werden. In Tabelle 5 ist zusammengestellt, welche physikalischen Größen einander entsprechen. Während bei Reibung, Wärmeleitung und Diffusion die geometrischen Vorstellungen einander gleich sind, handelt es sich beim elektrischen Beispiel um eine Doppelleistung verschwindender Induktivität und Querableitung, die an ihrem Ende mit einer konzentrierten Kapazität C_0 abgeschlossen ist.

Tabelle 5.

	Laminare Reibung	Wärmeleitung	Telegraphengleichung (wenn $L=G=0$)
(1)	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\lambda}{\varrho}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{l}{\varrho s}\,\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{RC}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
(R)	$-\lambda\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_1} = m\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x=x_1}$	$-l\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=x_1} = m\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{x=x_1}$	$-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = C_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=x_1}$
	v = Geschwindigkeit t = Zeit x = Ortskoordinate $a = \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}}$ λ = Zähigkeit ϱ = Dichte m = Masse je Fläche	ϑ = Temperatur t = Zeit x = Ortskoordinate $a = \sqrt{\frac{l}{\varrho s}}$ l = Wärmeleitfähigkeit ϱ = Dichte s = spez. Wärme m = Wärmekapazität je Flächeneinheit	u = Spannung t = Zeit x = Ortskoordinate $a = \sqrt{\frac{1}{RC}}$ R = bezogener Widerstand C = bezogene Kapazität C_0 = Kapazität des Abschlusses

6. Beispiel. In einem langen Hohlzylinder (Innenhalbmesser $r_2=10$ cm) befindet sich koaxial drehbar gelagert ein Innenzylinder (Halbmesser $r_1=9$ cm mit dem Trägheitsmoment je Längeneinheit $T/h=10150$ [gr cm]). Kräfte werden zwischen Außen- und Innenzylinder nur durch die $x_1=1$ cm dicke Wasserschicht zwischen beiden übertragen. Wie bewegt sich der Innenzylinder, wenn der Außenzylinder ruckartig um den Winkel φ_0 gedreht wird?

Für Wasser von 20° C ist die Zähigkeit $\lambda=0{,}01\left[\frac{\text{gr}}{\text{cm sec}}\right]$, die Dichte $\varrho=1\left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right]$. Damit wird $a^2=\lambda/\varrho=0{,}01$, also $a=0{,}1$. Aus der Beziehung: Winkelbeschleunigung × Trägheitsmoment = Drehmoment ergibt sich hier für die Randbedingung (R)

$$m=\frac{T}{h\,2\pi r_1^3}=\frac{10150}{2\pi 9^3}=2{,}22\left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}\right],\qquad K=\frac{\lambda}{ma}=\frac{0{,}01}{2{,}22\cdot 0{,}1}=0{,}045\,,\qquad K^2=0{,}00202\,.$$

Mit diesen Zahlenwerten ergibt sich unter Verwendung der Tabellen 1 und 4 für die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Innenzylinders

$$\frac{\omega_1}{\varphi_0} = \frac{v_1 + \Delta_{12} v_1 + \cdots}{r_1 \varphi_0} = -\psi F^1(x_1) + \psi^2 F^1(x_1) + \psi^2 F^1(3x_1) - \psi F^1(x_1) - \psi F^1(3x_1) + \cdots$$
$$= -\frac{K}{2\sqrt{t}}\left[2\Phi^I\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi^I\left(\frac{3x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right] + K^2\left[\Phi^0\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi^0\left(\frac{3x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right] + \cdots$$

Die Winkelauslenkung φ_1 des Innenzylinders ergibt sich unter Berücksichtigung von (27) durch Einsetzen von F^0 an Stelle von F^1 sofort zu

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0} = \frac{\int_0^t (v_1 + \Delta_{12} v_1 + \cdots) dt}{r_1 \varphi_0} = -\psi F^0(x_1) + \psi^2 F^0(x_1) + \psi^2 F^0(3x_1) - \psi F^0(x_1) - \psi F^0(3x_1)\, t + \cdots$$
$$= K\left[2\sqrt{t}\,\Phi^I\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{2x_1}{a}\Phi^0\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right) + \sqrt{t}\,\Phi^I\left(\frac{3x_1}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{3x_1}{a}\Phi^0\left(\frac{3x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right] +$$
$$+ K^2\left[\Phi^0\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\left(t + \frac{x_1^2}{2a_2}\right) - \frac{t}{2}\Phi^{II}\left(\frac{x_1}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi^0\left(\frac{3x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\left(t + \frac{9x_1^2}{2a^2}\right) - \frac{t}{2}\Phi^{II}\left(\frac{3x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Wird z. B. die Auslenkung des Innenzylinders nach $t = 25$ sec gesucht, ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$$\frac{x_1}{2a\sqrt{t}} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{25}} = 1 \qquad \frac{3x_1}{2a\sqrt{t}} = 3\,.$$

$$\Phi^0(1) = -0{,}1573, \qquad \Phi^I(1) = +0{,}4151, \qquad \Phi^{II}(1) = -0{,}8302,$$
$$\Phi^0(3) = -0{,}000021, \qquad \Phi^I(3) = +0{,}0001, \qquad \Phi^{II}(3) = -0{,}0008\,.$$

Bei Benützung der nächsthöheren Näherungen würde als Argument der Fehlerintegrale $5\,x_1/2a\sqrt{t} = 5$ auftreten. Diese würden damit so klein, daß sie unter die Genauigkeit der vierstelligen Tafeln fallen. Hier ergibt sich

$$\frac{\varphi_1(25\,\text{sec})}{\varphi_0} = 0{,}045\,[2 \cdot 5 \cdot 0{,}4151 + 20 \cdot (-0{,}1573) + 5 \cdot 0{,}0001 + 30 \cdot (-0{,}000021)] +$$
$$+ 0{,}00202\,[(-0{,}1573)(25+50) + 12{,}5 \cdot 0{,}8302 + (-0{,}000021)(25+450) - 12{,}5(-0{,}0008)],$$

also $\varphi_1(25\,\text{sec}) = 0{,}044\,\varphi_0$.

Entsprechend Gleichung (22) wird für $t \longrightarrow \infty$ auch hier $\varphi_1 = \varphi_0$, d. h. durch die ruckartige Drehung des Außenzylinders ändert sich die Relativlage des Zylinders nach langer Zeit nicht. Diese Aussage konnte experimentell mit großer Genauigkeit gesichert werden.

(Eingegangen am 7. Juli 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Karl Steinbuch*, (14a) Waiblingen a. d. Rems, Haydnweg 3.

Die eingespannte Rechteckplatte.

Von R. Ohlig.

1. Übersicht. Dem Problem der allseitig eingespannten Rechteckplatte ist in den letzten Jahren eine Reihe von Arbeiten gewidmet worden. *H. Leitz*[1] und *V. Lewe*[2] gehen von der freiaufliegenden Platte aus und bringen längs der Ränder Einspannmomente an, deren Größe aus der Bedingung horizontaler Randtangenten an die Biegefläche bestimmt werden. In ähnlicher Weise geht auch *Bittner*[3] vor. Die Differenzenrechnung ist von *Marcus*[4] als ein einfaches, leicht zu handhabendes Mittel ausgebaut worden, das auch *Pucher*[5] zur Berechnung der Randauflagerung benutzt. Verbessern läßt sich die Differenzenmethode noch durch das Interpolationsverfahren[6]. Von *Nádai*[7] rührt ein Verfahren her, die Randbedingungen durch ein orthogonales System von Funktionen zu erfüllen. Schließlich sei hier noch auf eine Methode hingewiesen, die Randbedingungen in diskreten Punkten zu erfüllen[8] oder die Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ mittels biharmonischer Polynome zu lösen[9]. Die Lösung des Randwertproblems mittels komplexer Eigenfunktionen zeigt *Koepcke*[10]. Es ist ferner auf eine Abhandlung von *A. E. H. Love*[11] hinzuweisen, in der das Problem der eingespannten Platte funktionentheoretisch durch Abbildung des Rechtecks auf einen Kreis gelöst wird. Eine numerische Berechnung gibt *Hencky*[12]. Hierher gehören weiter die *Ritz*sche und die *Galerkin*sche Methode[13] zur Lösung von Randwertproblemen. In diesem Zusammenhang ist auch die biharmonische Randwertaufgabe für einen beliebigen Bereich[14] anzuführen, die das Rechteck mitumfaßt, aber der ganzen Problemstellung nach mehr mathematisches als technisches Interesse besitzt. Aufbauend auf den Arbeiten von *Lauricella*[15] und *Mathieu*[16] hat *Happel*[17] die im Mittelpunkt durch eine Einzelkraft belastete, allseitig eingespannte Platte behandelt. Hierbei wird von der von *Kneser*[18] aufgestellten, zur ersten Randwertaufgabe gehörigen *Green*schen Funktion G für das Rechteck ausgegangen. Durch Hinzufügung einer Funktion $F(x,y)$, die innerhalb des Rechtecks ebenso wie G der Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ genügt, am Rande verschwindet und deren normale Ableitung die Gleichung

$$\frac{\partial r^2 G}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial n} = 0, \qquad r^2 = (x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2 \quad (\xi_1, \eta_1\text{-Koordinaten des Aufpunktes})$$

erfüllt, wird auch der zweiten Grenzbedingung der eingespannten Platte Genüge geleistet. Die nachfolgend angewandte Rechenmethode knüpft an die von *Happel* gegebene Entwicklung an, ohne mit ihr identisch zu sein. Durch Einschaltung der Lösung für die auf zwei gegenüberliegen-

---

[1] *H. Leitz*, Z. Math. Physik 64 (1917) S. 262.
[2] *V. Lewe*, Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten. Berlin 1926.
[3] *E. Bittner*, Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten, Wien 1938.
[4] *H. Marcus*, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Berlin 1932.
[5] *A. Pucher*, Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten, Deutscher Ausschuß für Eisenbeton, Heft 90, Berlin 1938.
[6] *R. Ohlig*, Ing.-Arch. 16 (1947) S. 64. Auf S. 51 Zeile 8 von unten ist dort folgende Berichtigung vorzunehmen: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}$, auf S. 54 ist in Abb. 3 der Momentenwert für $c/a = 0{,}10$ in $m_x = m_y = 0{,}227\ P$ abzuändern.
[7] *A. Nádai*, Die elastischen Platten, S. 182, Berlin 1925.
[8] *F. Tölke*, Ing.-Arch. 5 (1934) S. 209. — *J. Barta*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) S. 184. — *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 88.
[9] *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 90.
[10] *W. Koepcke*, Umfangsgelagerte Rechtecksplatten mit drehbaren und eingespannten Rändern, Borna-Leipzig 1941.
[11] *A. E. H. Love*, Proc. London Math. Soc. (2) 29 (1929) S. 189.
[12] *H. Hencky*, Diss. Darmstadt 1913.
[13] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 135. Berlin 1939.
[14] *Ph. Frank* und *R. v. Mises*, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 1. Teil, S. 845. Braunschweig 1930.
[15] *G. Lauricella*, Acta mathematica 32 (1909) S. 201.
[16] *E. Mathieu*, Théorie de l'élasticité des corps solides, seconde partie, S. 140. Paris 1890.
[17] *H. Happel*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1914, S. 37.
[18] *A. Kneser*, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl. Braunschweig 1922.

den Seiten eingespannte Platte wird zwar eine gewisse Unsymmetrie in den allgemeinen Lösungsansatz gebracht, doch erweist sich diese Maßnahme mit Rücksicht auf die numerischen Berechnungen als zweckmäßig.

Diese Übersicht erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere konnten die ausländischen Arbeiten der letzten Jahre nicht berücksichtigt werden. Im übrigen sei wegen weiterer Literaturangaben auf die angeführten Abhandlungen verwiesen.

2. Allgemeine Lösungsmethode. Es soll der allgemeinste Fall der durch eine Einzellast P an beliebiger Stelle belasteten vierseitig eingespannten Platte behandelt werden. Hierbei wird von der fundamentalen Superpositionseigenschaft der partiellen Differentialgleichung Gebrauch gemacht: kennt man ein partikuläres Integral w_0 der nicht homogenen Plattengleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{P}{N}, \quad N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1}$$

so ergibt sich ihre allgemeine Lösung aus

$$w = w_0 + \sum_i w_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

wo w_i der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w_i = 0$ genügt. Es lassen sich verhältnismäßig einfache Lösungen w_0 der vierseitig frei aufgelagerten Platte mittels der *Navier*schen Doppelreihe oder der *Lévy*schen Methode angeben. Auch die Einspannung längs zweier gegenüberliegenden Ränder ist mit dem *Lévy*schen Ansatz

$$w_{1m} = \sum_m Y_m \sin \alpha x, \quad \alpha = \frac{m\pi}{a} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

leicht zu beschreiben. Hierbei wird Y_m entsprechend den vorliegenden Randbedingungen des Problems gewählt. Schließlich ist der Lösung $w_0 + w_1$ eine weitere w_2 zu überlagern, die, ebenfalls aus *Lévy*schen Ansätzen hervorgehend, in der Form

$$w_2 = F_1(x, y) + F_2(x, y) \tag{4}$$

hinzugefügt wird. Für den weiteren Rechnungsgang ist es zweckmäßig, den allgemeinen Belastungsfall einer Einzellast an beliebiger Stelle der Rechteckplatte in symmetrische und antisymmetrische Belastungsbilder umzuordnen. Diese Umordnung wird nur für die Berechnung der Zusatzlösungen w_2 erforderlich; zur Ermittlung der Grundlösung w_0 kann auf bekannte Verfahren (s. Abschnitt 1) zurückgegriffen werden. Der allgemeine Belastungsfall entsteht aus der Superposition folgender vier Fälle:

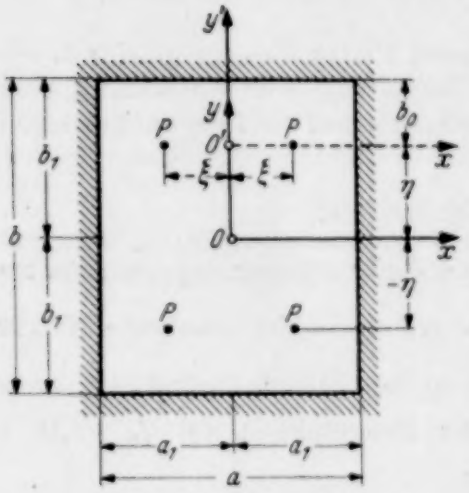

Abb. 1. Plattenbelastung: Symmetrie in der x- und y-Richtung.

I. Symmetrische Belastung in der x- und y-Richtung (Abb. 1),

II. Antisymmetrische Belastung in der x-Richtung, symmetrische Belastung in der y-Richtung (Abb. 2).

III. Symmetrische Belastung in der x-Richtung, antisymmetrische Belastung in der y-Richtung (Abb. 3).

IV. Antisymmetrische Belastung in der x- und y-Richtung (Abb. 4).

Die Durchbiegung w_2 des allgemeinen Falles ergibt sich dementsprechend zu

$$w_2 = \tfrac{1}{4}(w_I + w_{II} + w_{III} + w_{IV}) \tag{5}$$

und ebenso die hieraus zu ermittelnden Momente und Schnittkräfte der Rechteckplatte.

3. Symmetrische Belastung in der x- und y-Richtung (Abb. 1).

a) Die vierseitig aufgelagerte Platte. Da die Lösungsmethode den Fall der Einspannung an zwei gegenüberliegenden Seiten mit einschließt, soll neben der *Navier*schen Doppelreihe zunächst auch für die frei aufliegende Platte der *Lévy*sche Ansatz mit angegeben werden. Demgemäß ist zu setzen:

$$w_0' = \frac{2Pa^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} Y_m' \cos\alpha\xi \cos\alpha x, \tag{6}$$

$$w_0'' = \frac{2Pa^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} Y_m'' \cos\alpha\xi \cos\alpha x. \tag{7}$$

$(m = 1, 2, 3, \ldots)$

Hierbei ist

$$Y'_m = a'_m \operatorname{Cof} \alpha y' + b'_m \operatorname{Sin} \alpha y' + c'_m \alpha y' \operatorname{Cof} \alpha y' + d'_m \alpha y' \operatorname{Sin} \alpha y' \quad \text{für } y' > 0\,, \tag{8}$$

$$Y''_m = a''_m \operatorname{Cof} \alpha y' - b''_m \operatorname{Sin} \alpha y' - c''_m \alpha y' \operatorname{Cof} \alpha y' + d''_m \alpha y' \operatorname{Sin} \alpha y' \quad \text{für } y' < 0\,. \tag{9}$$

Die acht Koeffizienten a'_m bis d''_m lassen sich aus folgenden Randbedingungen ermitteln: für $y'=0$ ist

$$w'_0 = w''_0\,, \qquad \frac{\partial w'_0}{\partial y'} = \frac{\partial w''_0}{\partial y'}$$

$$m'_y = m''_y\,. \qquad -[p'_y - p''_y] = P = \frac{4P}{a} \sum_m \cos \alpha \xi \cos \alpha x \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots);$$

hierbei ist die Scherkraft $p'_y = -N \frac{\partial \Delta w'}{\partial y'}$, $p''_y = -N \frac{\partial \Delta w''}{\partial y''}$. Ferner gilt für $y' = b_0$

$$w'_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta w'_0 = 0\,.$$

In gleicher Weise ist für $y' = -\eta$

$$\frac{\partial w''_0}{\partial y'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta w''_0}{\partial y'} = 0\,.$$

Nimmt man noch eine Koordinatentransformation $y' = y - \eta$ vor und setzt zur Abkürzung:

$$a_{Im} = 1 + \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta + \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta \,(1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha b_0) + \alpha \eta \operatorname{Tg} \alpha b_0 \,(1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha \eta) \tag{10}$$

so werden die Beiwerte

$$\left.\begin{aligned}
a'_m &= \frac{1}{1 + \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta} \left[\frac{a_{Im} \operatorname{Tg} \alpha b_0}{1 + \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta} - \alpha b_0 \,(1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha b_0) \right], \\
b'_m &= -\frac{a_{Im}}{(1 + \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta)^2}\,, \\
c'_m &= \frac{1}{1 + \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta}\,, \\
d'_m &= -\frac{\operatorname{Tg} \alpha b_0}{1 + \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta}\,, \\
a''_m &= a'_m\,, \\
b''_m &= -b'_m - c'_m \,(1 + \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta)\,, \\
c''_m &= c'_m \operatorname{Tg} \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta\,, \\
d''_m &= d'_m\,.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Damit erhält man die Biegemomente, wenn zur Vereinfachung die Querdehnung $\nu = 0$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}
m_x = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2P}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \big[& a'_m \operatorname{Cof} \alpha (y - \eta) + b'_m \operatorname{Sin} \alpha (y - \eta) + c'_m \alpha (y - \eta) \operatorname{Cof} \alpha (y - \eta) + \\
& + d'_m \alpha (y - \eta) \operatorname{Sin} \alpha (y - \eta) \big] \cos \alpha \xi \cos \alpha x \quad \text{für } y - \eta > 0\,, \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)
\end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned}
m_x = \frac{2P}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \big[& a''_m \operatorname{Cof} \alpha (y - \eta) - b''_m \operatorname{Sin} \alpha (y - \eta) - c''_m \alpha (y - \eta) \operatorname{Cof} \alpha (y - \eta) + \\
& + d''_m \alpha (y - \eta) \operatorname{Sin} \alpha (y - \eta) \big] \cos \alpha \xi \cos \alpha x \qquad \text{für } y - \eta < 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{12b}$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für m_y und die Drillungsmomente m_{xy}.

b) Einspannung längs der Ränder $y = \pm \frac{b}{2}$. Mit

$$w_1 = \frac{2Pa^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} e_m \left(\alpha y \operatorname{Sin} \alpha y - \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Tg} \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Cof} \alpha y \right) \cos \alpha \xi \cos \alpha x \quad (m = 1, 3, 5, \ldots) \tag{13}$$

und der Randbedingung, daß längs $y = \frac{b}{2}$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial w'_0}{\partial y}$$

sein muß, ergibt sich, wenn zur Abkürzung

$$\omega \left(\alpha \frac{b}{2} \right) = a'_m \operatorname{Sin} \alpha b_0 + b'_m \operatorname{Cof} \alpha b_0 + c'_m \left[\alpha b_0 \operatorname{Sin} \alpha b_0 + \operatorname{Cof} \alpha b_0 \right] + d'_m \left[\alpha b_0 \operatorname{Cof} \alpha b_0 + \operatorname{Sin} \alpha b_0 \right], \tag{13a}$$

$$t \left(\alpha \frac{b}{2} \right) = \alpha \frac{b}{2} \frac{1}{\operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2}} + \operatorname{Sin} \alpha \frac{b}{2} \tag{13b}$$

gesetzt wird,

$$e_m = -\frac{\omega\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{t\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}, \quad \text{wobei} \quad w = w_0' + w_1 \text{ bzw. } = w_0'' + w_1. \tag{13c}$$

Sonderfall: Platte im Mittelpunkt belastet, $\xi = \eta = 0$. Es wird

$$a_m = \mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2} - \alpha\frac{b}{2}\left(1 - \mathfrak{Tg}^2\,\alpha\frac{b}{2}\right), \qquad b_m = -1, \qquad c_m = 1, \qquad d_m = -\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2},$$

$$\left.\begin{aligned}
(w_0)_{y=0} &= \frac{P a^2}{2\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3}\left[\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2} - \alpha\frac{b}{2}\left(1 - \mathfrak{Tg}^2\,\alpha\frac{b}{2}\right)\right]\cos\alpha x,\\
(m_{x0})_{y=0} &= \frac{P}{2\pi}\sum_m \frac{1}{m}\left[\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2} - \alpha\frac{b}{2}\left(1 - \mathfrak{Tg}^2\,\alpha\frac{b}{2}\right)\right]\cos\alpha x,\\
(m_{y0})_{y=0} &= \frac{P}{2\pi}\sum_m \frac{1}{m}\left[\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2} + \alpha\frac{b}{2}\left(1 - \mathfrak{Tg}^2\,\alpha\frac{b}{2}\right)\right]\cos\alpha x,
\end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$e_m = \frac{\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2}}{\alpha\frac{b}{2} + \mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}},$$

$$(w_1)_{y=0} = -\frac{P b^2}{8\pi N}\sum_m \frac{1}{m}\,\frac{\mathfrak{Tg}^2\,\alpha\frac{b}{2}}{\alpha\frac{b}{2} + \mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}}\cos\alpha x,$$

$$(m_{x1})_{\substack{x=0\\y=0}} = -\frac{P}{4}\,\frac{b}{a}\sum_m \frac{\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}^2\,\alpha\frac{b}{2}}{\alpha\frac{b}{2} + \mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}}\cos\alpha x, \quad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$(m_{y1})_{\substack{x=0\\y=0}} = -\frac{P}{4}\,\frac{b}{a}\sum_m \frac{\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2}}{\alpha\frac{b}{2} + \mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}}\left(2 - \alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2}\right)\cos\alpha x \quad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

Diese Werte stimmen mit denjenigen von *S. Timoshenko*[1] überein.

c) Vierseitige Einspannung. Für die w_0-Fläche wird die *Navier*sche Doppelreihe eingeführt.

$$p = \frac{16\,P}{a\,b}\sum_m\sum_n \cos\alpha\xi\cos\beta\eta\cos\alpha x\cos\beta y \qquad (m, n = 1, 3, 5, \ldots),$$

$$w_0 = \frac{16\,P}{a\,b\,N}\sum_m\sum_n \frac{\cos\alpha\xi\cos\alpha x\cos\beta\eta\cos\beta y}{(\alpha^2+\beta^2)^2}, \qquad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}. \tag{6a}$$

Hierbei ist

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(m^2 + n^2\varkappa^2\right) \text{ und } \varkappa = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = -\frac{16\,P}{a\,b\,N}\sum_m\sum_n \frac{m\pi}{a}\,\frac{\cos\alpha\xi\sin\alpha x\cos\beta\eta\cos\beta y}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_{x=a} = -\frac{16\,P a\varkappa}{\pi^3 N}\sum_m\sum_n \frac{m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2}\cos\alpha\xi\cos\beta\eta\cos\beta y \quad (m, n = 1, 3, 5, \ldots), \tag{6b}$$

Nunmehr ist auch noch der Ausdruck für $\partial w_1/\partial x$ in eine *Fourier*sche Reihe zu entwickeln. Aus (13) folgt

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{2\,P a}{\pi^2 N}\sum \frac{1}{m^2}\,e_m\left(\alpha y\,\mathfrak{Sin}\,\alpha y - \alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha y\right)\cos\alpha\xi\sin\alpha x \quad (m = 1, 3, 5, \ldots). \tag{14}$$

Für die Entwicklung der Funktion $f(x) = w_1$ in eine *Fourier*reihe werde die Festsetzung getroffen, daß im Intervall $+\frac{b}{2} \leqq y \leqq b$ und $-b \leqq y \leqq -\frac{b}{2}$ gilt:

$$f\left(x, \frac{b}{2} + \delta\right) = -f\left(x, \frac{b}{2} - \delta\right), \qquad f\left(x, -\frac{b}{2} - \delta\right) = -f\left(x, -\frac{b}{2} + \delta\right), \tag{15}$$

[1] *S. Timoshenko*, Bauing. 3 (1922) S. 51.

wo $0 < \delta < \frac{b}{2}$. Dann ist auch

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}+\delta} = -\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}-\delta} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{y=-\frac{b}{2}-\delta} = -\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{y=-\frac{b}{2}+\delta}.$$

Somit ist für alle Glieder

$$\int_{-b}^{b} K_m \cos \beta y \, dy = 0 \qquad \text{für } n = 0, 2, 4, \ldots$$

und

$$\int_{-b}^{b} K_m \cos \beta y \, dy = 4 \int_{0}^{\frac{b}{2}} K_m \cos \beta y \, dy \qquad \text{für } n = 1, 3, 5, \ldots .$$

Längs der Seite $x = \frac{a}{2}$ beträgt die Gleichung der Tangentenneigung der elastischen Fläche $\partial w_1/\partial x$ unter Beachtung, daß nach den Festsetzungen (15) sich folgende Werte für die *Fourier*entwicklung ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \alpha y \operatorname{Sin} \alpha y \cos \beta y \, dy &= \frac{4}{b}\left(\frac{n\pi}{2} \operatorname{Sin} \alpha \frac{b}{2} - \frac{2\alpha\beta \operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)\frac{\alpha(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha^2+\beta^2}, \\ \frac{4}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \operatorname{Cof} \alpha y \cos \beta y \, dy &= \frac{4}{b}\,\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{2Pa}{\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^2} e_m \left(\alpha y \operatorname{Sin} \alpha y - \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Tg} \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Cof} \alpha y\right) \cos \alpha \xi (-1)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{17}$$

Setzt man hier die Werte (16) ein, so erhält man schließlich

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{16 Pa \varkappa^2}{\pi^3 N}\sum_m \sum_n e_m \frac{n \operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2}}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2}(-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha \xi \cos \beta y. \tag{17a}$$

Hieraus ergibt sich

$$\left(\frac{\partial (w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \sum_n A_n \cos \beta y \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \tag{18}$$

mit

$$A_n = -\frac{16 Pa\varkappa}{\pi^3 N}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2}\left(m \cos \beta\eta - n\varkappa e_m \operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)\cos \alpha \xi \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

Für eine Einzellast in Feldmitte ($\xi = \eta = 0$) ist

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= \frac{4 Pa^3}{\pi^4 b N}\sum_m \sum_n \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2}, \\ w_1 &= \frac{Pa^2}{2\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3} e_m \left(\alpha y \operatorname{Sin} \alpha y - \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Tg} \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Cof} \alpha y\right)\cos \alpha x \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und

$$\left(\frac{\partial (w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{4 Pa\varkappa}{\pi^3 N}\sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2}\left(m - n\varkappa(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\alpha\frac{b}{2}\operatorname{Sin}\alpha\frac{b}{2}}{\alpha\frac{b}{2}+\operatorname{Sin}\alpha\frac{b}{2}\operatorname{Cof}\alpha\frac{b}{2}}\right)\cos \beta y \tag{20}$$
$$(m = 1, 3, 5, \ldots) \quad (n = 1, 3, 5, \ldots).$$

Zu der Lösung $w_0 + w_1$ (Einspannung längs der Kanten $y = \pm \frac{b}{2}$) ist gemäß (1) noch eine weitere Zusatzlösung (4) hinzuzufügen.

Wegen der im Fall I vorhandenen Symmetrie werden folgende Ansätze gewählt:

$$F_1(x,y) = \sum_m \frac{\mathfrak{G}_m}{\alpha^2}\left(\alpha y \operatorname{Sin} \alpha y - \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Tg} \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Cof} \alpha y\right)\cos \alpha x \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots), \tag{21}$$

$$F_2(\alpha,y) = \sum_n \frac{G_n}{\beta^2}\left(\beta x \operatorname{Sin} \beta x - \beta \frac{a}{2} \operatorname{Tg} \beta \frac{a}{2} \operatorname{Cof} \beta x\right)\cos \beta y \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots). \tag{22}$$

Bildet man die ersten Ableitungen $\frac{\partial w_2}{\partial x}$ und $\frac{\partial w_2}{\partial y}$, so erhält man für die Ränder $x=\frac{a}{2}$ bzw. $y=\frac{b}{2}$ die Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \sum_m \frac{\mathfrak{G}_m}{\alpha}\left(\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha y-\alpha y\,\mathfrak{Sin}\,\alpha y\right)\sin\frac{m\pi}{2}+\sum_n\frac{G_n}{\beta}\left(\mathfrak{Sin}\,\beta\frac{a}{2}+\frac{\beta\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta\frac{a}{2}}\right)\cos\beta y, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \sum_m \frac{\mathfrak{G}_m}{\alpha}\left(\mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}+\alpha\frac{b}{2}\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}}\right)\cos\alpha x+\sum_n\frac{G_n}{\beta}\left(\beta\frac{a}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\beta\frac{a}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\beta x-\beta x\,\mathfrak{Sin}\,\beta x\right)\sin\frac{n\pi}{2} \quad (24)$$

Diese Ausdrücke sind, um sie mit den Werten $\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial x}$ und $\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial y}$ vergleichen zu können, in *Fourier*sche Reihen zu entwickeln. Hinsichtlich der Fortsetzung der beiden Funktionen über die Ränder $x=\pm\frac{a}{2}$, $y=\pm\frac{b}{2}$ hinaus werde dieselbe Festsetzung wie unter (15) getroffen. Man erhält unter Beachtung der Ausdrücke (16) und (17) die Werte

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \sum_n\left[\frac{8}{b}\sin\frac{n\pi}{2}\sum_m\mathfrak{G}_m\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}\sin\frac{m\pi}{2}+\frac{G_n}{\beta}\left(\mathfrak{Sin}\,\beta\frac{a}{2}+\frac{\beta\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta\frac{a}{2}}\right)\right]\cos\beta y \quad (25)$$

$(m=1,3,5,\ldots)\quad(n=1,3,5,\ldots),$

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \sum_m\left[\frac{\mathfrak{G}_m}{\alpha}\left(\mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}+\frac{\alpha\frac{b}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}}\right)+\frac{8}{a}\sin\frac{m\pi}{2}\sum_n G_n\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\mathfrak{Cof}\,\beta\frac{a}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos\alpha x \quad (26)$$

$(m,n=1,3,5,\ldots).$

Aus der Randbedingung

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = -\left(\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}}$$

ergibt sich mit

$$t\left(\beta\frac{a}{2}\right)=\mathfrak{Sin}\,\beta\frac{a}{2}+\frac{\beta\frac{a}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta\frac{a}{2}}$$

der Wert

$$G_n=-\frac{A_n\beta}{t\left(\beta\frac{a}{2}\right)}-\frac{8\beta^2\sin\frac{n\pi}{2}}{bt\left(\beta\frac{a}{2}\right)}\sum_m\mathfrak{G}_m\frac{\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\sin\frac{m\pi}{2}\qquad\begin{matrix}(m=1,3,5,\ldots)\\(n=1,3,5,\ldots).\end{matrix} \quad (27)$$

In derselben Weise erhält man aus $\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}}=0$

$$\mathfrak{G}_m=-\frac{8\alpha^2\sin\frac{m\pi}{2}}{at\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}\sum_n G_n\frac{\beta\,\mathfrak{Cof}\,\beta\frac{a}{2}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\sin\frac{n\pi}{2}. \quad (28)$$

Setzt man den Ausdruck $\mathfrak{G}_m$ in denjenigen von G_n ein, so wird

$$G_n=-\frac{A_n\beta}{t\left(\beta\frac{a}{2}\right)}+\frac{64\beta^2\sin\frac{n\pi}{2}}{abt\left(\beta\frac{a}{2}\right)}\sum_m\frac{\alpha^3\varphi\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\sum_{n'}\left[G_{n'}\frac{\beta'\,\mathfrak{Cof}\,\beta'\frac{a}{2}}{(\alpha^2+\beta'^2)^2}\sin\frac{n'\pi}{2}\right]. \quad (29)$$

Hierbei ist $\varphi(x)=\frac{\mathfrak{Cof}\,x}{t(x)}$. Die Gleichung $G_n=S_n+\sum_{n'}R_{n,n'}G_{n'}$ wird durch fortgesetzte Approximation[1] gelöst. Für die Größen $G_{n'}$ wird wieder

$$G_{n'}=S_{n'}+\sum_{n''}R_{n'n''}G_{n''},$$

$$G_{n''}=S_{n''}+\sum_{n'''}R_{n''n'''}G_{n'''}$$

usw. gesetzt. Damit erhält man

$$G_n=S_n+\sum_{n'}R_{n,n'}\left(S_{n'}+\sum_{n''}R_{n'n''}G_{n''}\right)=S_n+\sum_{n'}R_{nn'}S_{n'}+\sum_{n'}R_{nn'}\sum_{n''}R_{n'n''}G_{n''}$$

$$=S_n+\sum_{n'}R_{nn'}S_{n'}+\sum_{n'}R_{n,n'}\sum_{n''}R_{n'n''}S_{n''}+\sum_{n'}R_{nn'}\sum_{n''}R_{n'n''}\sum_{n'''}R_{n''n'''}G_{n'''}$$

usw.

[1] *S. Iguchi*, Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten, S. 42, Berlin 1933.

Nun ist

$$S_n = -\frac{A_n \beta}{t\left(\beta \frac{a}{2}\right)}, \quad S_{n'} = -\frac{A_{n'} \beta'}{t\left(\beta' \frac{a}{2}\right)}, \quad S_{n''} = -\frac{A_{n''} \beta''}{t\left(\beta'' \frac{a}{2}\right)},$$

$$R_{n\,n'} = \frac{64\,\beta^2 \sin\frac{n\pi}{2}}{a\,b\,t\left(\beta \frac{a}{2}\right)} \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \sum_{n'} \frac{\beta' \mathfrak{Cof}\,\beta' \frac{a}{2}}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} \sin\frac{n'\pi}{2},$$

$$R_{n'\,n''} = \frac{64\,\beta'^2 \sin\frac{n'\pi}{2}}{a\,b\,t\left(\beta' \frac{a}{2}\right)} \sum_{m'} \frac{\alpha'^3 \varphi\left(\alpha' \frac{b}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sum_{n''} \frac{\beta'' \mathfrak{Cof}\,\beta'' \frac{a}{2}}{(\alpha'^2+\beta''^2)^2} \sin\frac{n''\pi}{2}$$

usw. Dann werden nach entsprechender Zusammenfassung die ersten Glieder der Reihe

$$\sum_{n'} R_{n\,n'} S_{n'} = -\frac{64\,\beta^2 \sin\frac{n\pi}{2}}{a\,b\,t\left(\beta \frac{a}{2}\right)} \sum_{n'} A_{n'} \beta'^2 \varphi\left(\beta' \frac{a}{2}\right) \sin\frac{n'\pi}{2} \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2 (\alpha^2+\beta'^2)^2},$$

$$\sum_{n'} R_{n\,n'} \sum_{n''} R_{n'\,n''} S_{n''} = -\frac{64^2 \beta^2 \sin\frac{n\pi}{2}}{a^2 b^2 t\left(\beta \frac{a}{2}\right)} \sum_{n''} \beta''^2 A_{n''} \varphi\left(\beta'' \frac{a}{2}\right) \sin\frac{n''\pi}{2} \sum_{m'} \frac{\alpha'^3 \varphi\left(\alpha' \frac{b}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta''^2)^2} \times$$
$$\times \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta' \frac{a}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2 (\alpha^2+\beta^2)^2},$$

Setzt man nach dem Vorgehen von *Mathieu*[1] zur Abkürzung

$$\Phi_1(n,n') = \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2 (\alpha^2+\beta'^2)^2},$$

$$\Phi_3(n,n') = \sum_{m'} \frac{\alpha'^3 \varphi\left(\alpha' \frac{b}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta''^2)^2} \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta' \frac{a}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \Phi_1,$$

so wird

$$G_n = -\frac{A_n \beta}{t\left(\beta \frac{a}{2}\right)} - \frac{64\,\beta^2 \sin\frac{n\pi}{2}}{a\,b\,t\left(\beta \frac{a}{2}\right)} \sum_{n'} A_{n'} \beta'^2 \varphi\left(\beta' \frac{a}{2}\right) \sin\frac{n'\pi}{2} \left[\Phi_1(n,n') + \right.$$
$$\left. + \frac{64}{a\,b} \Phi_3(n,n') + \frac{64^2}{a^2 b^2} \Phi_5(n,n') + \cdots\right]. \tag{30}$$

Die Berechnung von $\mathfrak{G}_m$ erfolgt in ähnlicher Weise. In die Formel (28) wird der Wert von G_n nach Formel (27) eingesetzt. Man erhält

$$\mathfrak{G}_m = \frac{8\,\alpha^2 \sin\frac{m\pi}{2}}{a\,t\left(\alpha \frac{b}{2}\right)} \sum_n \frac{A_n \beta}{t\left(\beta \frac{a}{2}\right)} \frac{\beta \mathfrak{Cof}\,\beta \frac{a}{2}}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{64\,\alpha^2 \sin\frac{m\pi}{2}}{a\,b\,t\left(\alpha \frac{b}{2}\right)} \sum_n \frac{\beta^3 \mathfrak{Cof}\,\beta \frac{a}{2}}{t\left(\beta \frac{a}{2}\right)(\alpha^2+\beta^2)^2} \times$$
$$\times \sum_{m'} \mathfrak{G}_{m'} \frac{\alpha \mathfrak{Cof}\,\alpha' \frac{b}{2}}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sin\frac{m'\pi}{2}.$$

Mit

$$\mathfrak{G}_m = S_m + \sum_{m'} R_{m\,m'} \mathfrak{G}_{m'},$$

$$\mathfrak{G}_{m'} = S_{m'} + \sum_{m''} R_{m'\,m''} \mathfrak{G}_{m''}$$

usw. erhält man

$$\mathfrak{G}_m = S_m + \sum_{m'} R_{m\,m'} S_{m'} + \sum_{m'} R_{m\,m'} \sum_{m''} R_{m'\,m''} \mathfrak{G}_{m''}.$$
$$= S_m + \sum_{m'} R_{m\,m'} S_{m'} + \sum_{m'} R_{m\,m'} \sum_{m''} R_{m'\,m''} S_{m''} + \sum_{m'} R_{m\,m'} \sum_{m''} R_{m'\,m''} \sum_{m'''} R_{m''\,m'''} \mathfrak{G}_{m'''}$$

usw.

[1] *E. Mathieu*, a. a. O., S. 151.

Hierbei ist

$$S_m = \frac{8\alpha^2 \sin\frac{m\pi}{2}}{at\left(\alpha\frac{b}{2}\right)} \sum_n \frac{A_n \beta^2 \varphi\left(\beta\frac{a}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$S_{m'} = \frac{8\alpha'^2 \sin\frac{m'\pi}{2}}{at\left(\alpha'\frac{b}{2}\right)} \sum_{n'} \frac{A_{n'} \beta'^2 \varphi\left(\beta'\frac{a}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sin\frac{n'\pi}{2},$$

$$R_{m\,m'} = \frac{64\alpha^2 \sin\frac{m\pi}{2}}{abt\left(\alpha\frac{b}{2}\right)} \sum_n \frac{\beta^3 \varphi\left(\beta\frac{a}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \sum_{m'} \frac{\alpha' \mathfrak{Cof}\,\alpha'\frac{b}{2}}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sin\frac{m'\pi}{2}.$$

usw. Bildet man nunmehr die Ausdrücke $\sum_{m'} R_{m\,m'} S_{m'}$, $\sum_{m'} R_{m\,m'} \sum R_{m'\,m''} S_{m''}$ usw., dann wird nach gehöriger Zusammenfassung, und wenn man zur Abkürzung

$$\Phi_0(n', m) = \frac{1}{(\alpha^2+\beta'^2)^2},$$

$$\Phi_2(n', m) = \sum_{m'} \frac{\alpha'^3 \varphi\left(\alpha'\frac{b}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sum_n \frac{\beta^3 \varphi\left(\beta\frac{a}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta^2)^2} \Phi_0(n, m),$$

$$\Phi_4(n', m'') = \sum_{m''} \frac{\alpha''^3 \varphi\left(\alpha''\frac{b}{2}\right)}{(\alpha''^2+\beta''^2)^2} \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta'\frac{a}{2}\right)}{(\alpha''^2+\beta'^2)^2} \Phi_2(n, m)$$

usw. schreibt,

$$\mathfrak{S}_m = \frac{8\alpha^2 \sin\frac{m\pi}{2}}{at\left(\alpha\frac{b}{2}\right)} \sum_n A_n \beta^2 \varphi\left(\beta\frac{a}{2}\right) \sin\frac{n\pi}{2} \left[\Phi_0(n, m) + \frac{64}{ab}\Phi_2(n, m) + \frac{64^2}{a^2 b^2}\Phi_4(n, m) + \cdots\right] \quad (31)$$

Die numerische Ermittlung von Φ vereinfacht sich durch Einführung der dimensionslosen Größen m und n an Stelle von α und β. Es ist

$$\Phi_1(n, n') = \sum_m \frac{\frac{m^3\pi^3}{a^3}\varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa}\right)}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^8 (m^2+n^2\varkappa^2)^2 (m^2+n'^2\varkappa^2)^2} = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^5 \sum_m \frac{2^5 m^3 \varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa}\right)}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2 (m^2+n'^2\varkappa^2)^2} = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^5 \lambda_1^I(n, n').$$

$$\Phi_2(n, m) = \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta'\frac{a}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2 (\alpha^2+\beta'^2)^2} = \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta'\frac{a}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2 (\alpha^2+\beta'^2)^2}$$

$$= \frac{\varkappa^3 a}{2\pi} \sum_{n'} \frac{2 n'^3 \varphi\left(\frac{n'\pi\varkappa}{2}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa^2)^2} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^5 \lambda_1^I(n, n') = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \varkappa^3 \lambda_2^I(m, n),$$

$$\Phi_3(n, n') = \sum_{m'} \frac{\alpha'^3 \varphi\left(\alpha'\frac{b}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta'\frac{a}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^2 (\alpha^2+\beta'^2)^2}$$

$$= \sum_{m'} \frac{\alpha'^3 \varphi\left(\alpha'\frac{b}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \varkappa^3 \lambda_2^I(m, n) = \sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \varkappa^3 \lambda_2^I(m, n).$$

Nun ist

$$\sum_m \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} = \sum_m \frac{\frac{m^3\pi^3}{a^3}\varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa}\right)}{\frac{\pi^4}{a^4}(m^2+n'^2\varkappa^2)^2} = \frac{a}{2\pi} \sum_m \frac{2 m^3 \varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa^2)^2},$$

$$\Phi_3(n, n') = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^7 \varkappa^3 \lambda_3^I(n, n').$$

$$\Phi_4(n, m) = \sum_{m'} \frac{\alpha^3 \varphi\left(\alpha\frac{b}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta'\frac{a}{2}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^6 \varkappa^3 \lambda_2^I(m, n)$$

$$= \sum_{n'} \frac{\beta'^3 \varphi\left(\beta'\frac{a}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^7 \varkappa^3 \lambda_3^I(n, n').$$

Mit

$$\sum_{n'} \frac{\beta' \varphi\left(\beta' \frac{a}{2}\right)}{(\alpha^2+\beta'^2)^2} = \sum_{n'} \frac{n'^3 \varkappa^3 \varphi\left(\frac{n' \pi \varkappa}{2}\right)}{\frac{\pi}{a}(m^2+n'^2\varkappa^2)^2}$$

wird hier

$$\Phi_4(n,m) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^8 \varkappa^6 \lambda_4^I(m,n).$$

Zur Abkürzung ist in diesen Formeln gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1^I(n,n') &= \sum_m \frac{2^5 m^3 \varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa}\right)}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2 (m^2+n'^2\varkappa^2)^2}, \\
\lambda_2^I(m,n) &= \sum_{n'} \frac{2 n'^3 \varphi\left(\frac{n'\pi\varkappa}{2}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa^2)^2} \lambda_1^I(n,n'), \\
\lambda_3^I(n,n') &= \sum_m \frac{2 m^3 \varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa^2)^2} \lambda_2^I(m,n), \\
\lambda_4^I(m,n) &= \sum_{n'} \frac{2 n'^3 \varphi\left(\frac{n'\pi\varkappa}{2}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa^2)^2} \lambda_3^I(n,n') \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (m,n = 1,3,5,\ldots) \qquad (32)$$

usw. Mit $\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ und $\sin\frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$ für $m,n = 1, 3, 5, \ldots$ folgt aus (30)

$$\left.\begin{aligned}
G_m = &-\frac{A_n n\pi}{b\, t\left(\frac{n\pi\varkappa}{2}\right)} - \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 n^2 \varkappa^4}{\pi\, t\left(\frac{n\pi\varkappa}{2}\right)} \sum_{n'} (-1)^{\frac{n'-1}{2}} A_n \frac{n'^2}{b} \varphi\left(\frac{n'\pi\varkappa}{2}\right)\left[\lambda_1^I(n,n') + \right. \\
&\left. + \frac{16\varkappa^4}{\pi^2}\lambda_2^I(n,n') + \frac{16^2\varkappa^8}{\pi^4}\lambda_3^I(n,n') + \cdots\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (30\,a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{G}_m = &\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m^2 \varkappa}{t\left(\frac{m\pi}{2\varkappa}\right)} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_n n^2}{2b} \varphi\left(\frac{n\pi\varkappa}{2}\right)\left[\frac{16}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2} + \frac{16\varkappa^4}{\pi^2}\lambda_2^I(m,n) + \right. \\
&\left. + \frac{16^2\varkappa^8}{\pi^4}\lambda_4^I(m,n) + \cdots\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (31\,a)$$

4. Antisymmetrische Belastung in der x-Richtung, symmetrische Belastung in der y-Richtung (Abb. 2). Die Belastungsfunktion wird in der x-Richtung durch die Reihe dargestellt

$$P(x) = \frac{2P}{a_1} \sum_m \sin\alpha_1\xi \sin\alpha_1 x,$$

$$\alpha_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad a_1 = \frac{a}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für die frei aufliegende Platte gilt dann

$$w_0' = \frac{P a_1^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} Y_m' \sin\alpha_1\xi \sin\alpha_1 x \quad \text{für } y' > 0, \qquad (33\,a)$$

$$w_0'' = \frac{P a_1^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} Y_m'' \sin\alpha_1\xi \sin\alpha_1 x \quad \text{für } y' < 0. \qquad (33\,b)$$

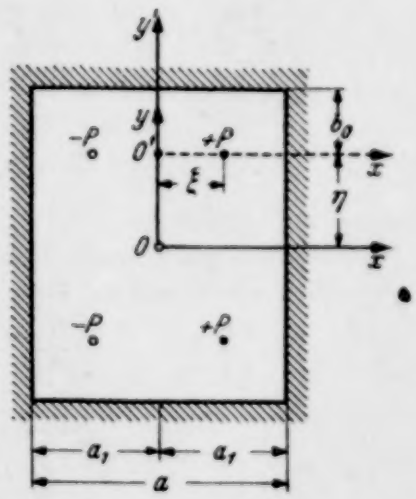

Abb. 2. Plattenbelastung: Antisymmetrie in der x-Richtung, Symmetrie in der y-Richtung.

In ähnlicher Weise wie in Abschnitt **3** werden die Funktionen Y' und Y'' angesetzt zu

$$Y_m' = A_m' \mathfrak{Cof}\,\alpha_1(y-\eta) + B_m' \mathfrak{Sin}\,\alpha_1(y-\eta) + C_m' \alpha_1(y-\eta)\mathfrak{Cof}\,\alpha_1(y-\eta) + D_m' \alpha_1(y-\eta)\mathfrak{Sin}\,\alpha_1(y-\eta), \qquad (34)$$

$$Y_m'' = A_m'' \mathfrak{Cof}\,\alpha_1(y-\eta) - B_m'' \mathfrak{Sin}\,\alpha_1(y-\eta) - C_m'' \alpha_1(y-\eta)\mathfrak{Cof}\,\alpha_1(y-\eta) + D_m'' \alpha_1(y-\eta)\mathfrak{Sin}\,\alpha_1(y-\eta). \qquad (35)$$

Die Koeffizienten A'_m bis D'_m sind nunmehr unter Beachtung der Rand- und Scherkraftbedingungen wie unter 3 zu bestimmen. Man erhält

$$\mathfrak{a}_{II\,m} = 1 + \mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\eta + \alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\eta(1-\mathfrak{Tg}^2\alpha_1 b_0) + \alpha_1\eta\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0(1-\mathfrak{Tg}^2\alpha_1\eta)\,. \tag{36}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} A'_m &= \frac{\mathfrak{a}_{II\,m}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0}{(1+\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\eta)^2} - \frac{\alpha_1 b_0(1-\mathfrak{Tg}^2\alpha_1 b_0)}{1+\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\eta}\,, & A''_m &= A'_m\,,\\ B'_m &= -\frac{\mathfrak{a}_{II\,m}}{(1+\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\eta)^2}\,, & B''_m &= -B'_m - C'_m(1+\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\eta)\,,\\ C'_m &= \frac{1}{1+\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\eta}\,, & C''_m &= 1-C'_m\,,\\ D'_m &= -\frac{\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0}{1+\mathfrak{Tg}\,\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\eta}\,, & D''_m &= D'_m\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Einspannung längs der Ränder $y = \pm\frac{b}{2}$ wird durch den Ansatz

$$w_1 = \frac{2Pa_1^2}{\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3} E_m\left(\alpha_1 y\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 y - \alpha_1\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 y\right)\sin\alpha_1\xi\sin\alpha_1 x \quad (m=1,2,3,\ldots) \tag{38}$$

erfüllt. Aus der Randbedingung für $y=\frac{b}{2}$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

folgt

$$E_m = -\frac{\omega\left(\alpha_1\frac{b}{2}\right)}{t\left(\alpha_1\frac{b}{2}\right)} \tag{39}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \omega\left(\alpha_1\frac{b}{2}\right) = {} & A'_m\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 b_0 + B'_m\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 b_0 + C'_m(\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 b_0 + \mathfrak{Cof}\,\alpha_1 b_0) + \\ & + D'_m(\alpha_1 b_0\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 b_0 + \mathfrak{Sin}\,\alpha_1 b_0)\,, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$t\left(\alpha_1\frac{b}{2}\right) = \alpha\frac{b}{2}\,\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2}} + \mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}\,. \tag{41}$$

Zur Ermittlung der vierseitigen Einspannung geht man von der *Navier*schen Doppelreihe

$$w_0 = \frac{8P}{a_1 b N}\sum_m\sum_n \frac{\sin\alpha_1\xi\sin\alpha_1 x\cos\beta\eta\cos\beta y}{(\alpha_1^2+\beta^2)^2} \quad \begin{matrix}(m=1,2,3,\ldots)\\(n=1,3,5,\ldots)\end{matrix} \tag{42}$$

aus. Es ist

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{8P}{a_1 b N}\sum_m\sum_n \frac{m\pi}{a_1}\,\frac{\sin\alpha_1\xi\cos\alpha_1 x\cos\beta\eta\cos\beta y}{(\alpha_1^2+\beta^2)^2}\,, \quad \alpha_1 = \frac{m\pi}{a_1}\,, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

und

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \frac{8Pa_1\varkappa_1}{\pi^3 N}\sum_m\sum_n \frac{(-1)^m m}{(m^2+n^2\varkappa_1^2)^2}\sin\alpha_1\xi\cos\beta\eta\cos\beta y\,, \tag{43}$$

wenn zur Abkürzung $\varkappa_1 = a_1/b$ gesetzt wird. Für die Entwicklung von (38) in eine *Fourier*reihe werden bezüglich ihrer Fortsetzung über das Intervall 0 bis a hinaus ähnliche Festsetzungen getroffen wie unter 3. Man erhält aus

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \frac{2Pa_1}{\pi^2 N}\sum_m \frac{(-1)^m}{m^2} E_m\left(\alpha_1 y\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 y - \alpha_1\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha_1\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1 y\right)\sin\alpha_1\xi\,, \tag{44}$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a_1} = -\frac{16Pa_1\varkappa_1^2}{\pi^3 N}\sum_m\sum_n E_m\frac{n\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1\frac{b}{2}}{(m^2+n^2\varkappa_1^2)^2}(-1)^m(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\alpha_1\xi\cos\beta y \quad \begin{matrix}(m=1,2,3,\ldots)\\(n=1,3,5,\ldots)\end{matrix}. \tag{45}$$

Endlich ergibt sich

$$\left(\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \sum_n A_n\cos\beta y \tag{46}$$

mit

$$A_n = \frac{8Pa_1\varkappa_1}{\pi^3 N}\sum_m \frac{(-1)^m}{(m^2+n^2\varkappa_1^2)^2}\left\{m\cos\beta\eta - 2\varkappa_1 E_m\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1\frac{b}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right\}\sin\alpha_1\xi \quad (m=1,2,3,\ldots).$$

Fügt man nunmehr noch eine Lösung $w_2 = F_1(x,y) + F_2(x,y)$ hinzu, wobei infolge Antisymmetrie in der x-Richtung und Symmetrie in der y-Richtung zu setzen ist:

$$F_1(x,y) = \sum_m \frac{\mathfrak{H}_m}{\alpha_1^2}\left(\alpha_1 y \operatorname{Sin}\alpha_1 y - \alpha_1 \frac{b}{2}\operatorname{Tg}\alpha_1\frac{b}{2}\operatorname{Cof}\alpha_1 y\right)\sin\alpha_1 x, \tag{47}$$

$$F_2(x,y) = \sum_n \frac{H_n}{\beta^2}(\beta x \operatorname{Cof}\beta x - \beta a_1 \operatorname{Ctg}\beta a_1 \operatorname{Sin}\beta x)\cos\beta y, \tag{48}$$

so erhält man nach gehöriger Zusammenfassung

$$H_n = -\frac{A_n\beta}{u(\beta a_1)} + \frac{8\beta^2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{b\,u(\beta a_1)}\sum_m \mathfrak{H}_m \frac{\alpha_1 \operatorname{Cof}\alpha_1\frac{b}{2}}{(\alpha_1^2+\beta^2)^2}\cos m\pi, \tag{49}$$

$$\mathfrak{H}_m = \frac{4\alpha_1^2\cos m\pi}{a_1 t\left(\alpha_1\frac{b}{2}\right)}\sum_n H_n \frac{\beta \operatorname{Sin}\beta a_1}{(\alpha_1^2+\beta^2)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad \begin{matrix}(m=1,2,3,\ldots)\\(n=1,3,5,\ldots).\end{matrix} \tag{50}$$

Hierbei ist $u(\beta a_1) = \operatorname{Cof}\beta a_1 - \frac{\beta a_1}{\operatorname{Sin}\beta a_1}$. Setzt man wie früher $\varphi(x) = \frac{\operatorname{Cof} x}{t(x)}$, ferner $\psi(x) = \frac{\operatorname{Sin} x}{u(x)}$, so entsteht durch fortgesetzte Approximation schließlich der Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} H_n = -\frac{A_n\beta}{u(\beta a_1)} - \frac{32\beta^2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{a_1 b\,u(\beta a_1)}\sum_{n'} A_{n'}\beta'^2\psi(\beta' a_1)\sin\frac{n'\pi}{2}\Big[\Phi_1(n,n') + \frac{32}{a_1 b}\Phi_3(n,n') + \\ + \frac{32^2}{a_1^2 b^2}\Phi_5(n,n') + \cdots\Big] \qquad (m=1,2,3,\ldots)\quad (n,n'=1,3,5,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

und

$$\mathfrak{H}_m = -\frac{4\alpha_1^2\cos m\pi}{a_1 t\left(\alpha_1\frac{b}{2}\right)}\sum_n A_n\beta^2\psi(\beta a_1)\sin\frac{n\pi}{2}\left[\Phi_0(n,m) + \frac{32}{a_1 b}\Phi_2(n,m) + \frac{32^2}{a_1^2 b^2}\Phi_4(n,m) + \cdots\right]. \tag{52}$$

Mit

$$\Phi_0(n,m) = \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{a_1^2}(m^2+n^2\varkappa_1^2)\right]^2},$$

$$\Phi_1(n,n') = \left(\frac{a_1}{2\pi}\right)^5\sum_m \frac{2^5 m^3\varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa_1}\right)}{(m^2+n^2\varkappa_1^2)^2(m^2+n'^2\varkappa_1^2)^2} = \left(\frac{a_1}{2\pi}\right)^5\lambda_1^{II}(n,n'),$$

$$\Phi_2(n',m) = \frac{\varkappa_1^3 a_1}{2\pi}\sum_{n'}\frac{2n'^3\psi(n'\pi\varkappa_1)}{(m^2+n'^2\varkappa_1^2)^2}\left(\frac{a_1}{2\pi}\right)^5\lambda_1^{II}(n,n') = \left(\frac{a_1}{2\pi}\right)^6\varkappa_1^3\lambda_2^{II}(m,n)$$

usw. wird zuletzt

$$\left.\begin{aligned} H_n = -\frac{A_n n\pi}{b\,u(n\pi\varkappa_1)} - \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n^2\varkappa_1^4}{\pi\,u(n\pi\varkappa_1)}\sum_{n'}(-1)^{\frac{n'-1}{2}}A'_n\frac{u'^2}{b}\psi(n'\pi\varkappa_1)\Big[\lambda_1^{II}(n,n') + \\ + \frac{8\varkappa_1^4}{\pi^2}\lambda_3^{II}(n,n') + \frac{8^2\varkappa_1^8}{\pi^4}\lambda_5^{II}(n,n') + \cdots\Big] \qquad (n,n'=1,3,5,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_m = -\frac{(-1)^m m^2\varkappa_1}{t\left(\frac{m\pi}{2\varkappa_1}\right)}\sum_n\frac{A_n n^2}{4b}\psi(n\pi\varkappa_1)(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big[\frac{16}{(m^2+n^2\varkappa_1^2)^2} + \frac{8\varkappa_1^4}{\pi^2}\lambda_2^{II}(m,n) + \\ + \frac{8^2\varkappa_1^2}{\pi^4}\lambda_4^{II}(m,n) + \cdots\Big] \qquad (m=1,2,3,\ldots)\quad (n=1,3,5,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{II}(n,n') &= \sum_m \frac{2^5 m^3\varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa_1}\right)}{(m^2+n^2\varkappa_1^2)^2(m^2+n'^2\varkappa_1^2)^2},\\ \lambda_2^{II}(m,n) &= \sum_{n'}\frac{2n'^3\psi(n'\pi\varkappa_1)}{(m^2+n'^2\varkappa_1^2)^2}\lambda_1^{II}(n,n'),\\ \lambda_3^{II}(n,n') &= \sum_m\frac{2m^3\varphi\left(\frac{m\pi}{2\varkappa_1}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa_1^2)^2}\lambda_2^{II}(m,n),\\ \lambda_4^{II}(m,n) &= \sum_{n'}\frac{2n'^3\psi(n'\pi\varkappa_1)}{(m^2+n'^2\varkappa_1^2)^2}\lambda_3^{II}(n,n') \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(m=1,2,3,\ldots)\\(n=1,3,5,\ldots)\end{matrix} \tag{55}$$

usw.

5. Symmetrische Belastung in der x-Richtung, antisymmetrische Belastung in der y-Richtung (Abb. 3). Mit Hilfe der Reihendarstellung der Belastungsfunktion

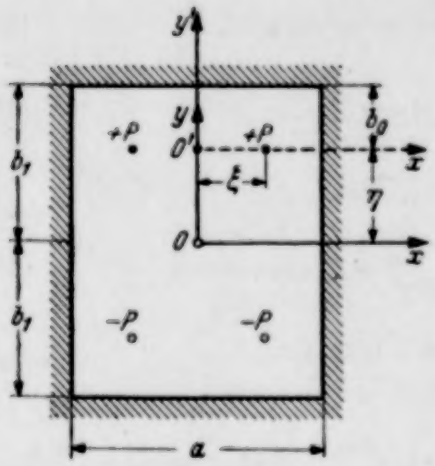

Abb. 3. Plattenbelastung: Symmetrie in der x-Richtung, Antisymmetrie in der y-Richtung.

$$P(x) = \frac{4P}{a} \sum_m \cos \alpha \xi \cos \alpha x \qquad (m = 1, 3, 5 \ldots)$$

erhält man für die frei aufgelagerte Platte

$$w_0' = \frac{2 P a^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} Y_m' \cos \alpha \xi \cos \alpha x \qquad \text{für } y' > 0\,, \quad (56)$$

$$w_0'' = \frac{2 P a^2}{\pi^3 N} \sum_n \frac{1}{m^3} Y_m'' \cos \alpha \xi \cos \alpha x \qquad \text{für } y' < 0\,, \quad (57)$$

wobei für Y_m' und Y_m'' die allgemeinen Ansätze (8) und (9) benutzt werden. Die Koeffizienten a_m' bis d_m'' ergeben sich aus den Randbedingungen freier Auflagerung längs der Kanten $y' = b_0$ und $y' = -\eta$ (Plattenmitte) und der Bedingung, daß die Scherkraft längs der Linie $y' = 0$ gleich der Belastungsfunktion sein muß. Man erhält mit

$$a_{III\,m} = \alpha b_0 \operatorname{Tg} \alpha \eta (1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha b_0) - \alpha \eta \operatorname{Tg} \alpha b_0 (1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha \eta) + \operatorname{Tg} \alpha \eta (\operatorname{Tg} \alpha \eta + \operatorname{Tg} \alpha b_0) \quad (58)$$

die Werte

$$\left.\begin{aligned} a_m' &= -b_m' \operatorname{Tg} \alpha b_0 - c_m' \alpha b_0 (1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha b_0), & a_m'' &= a_m', \\ b_m' &= -\frac{a_{III\,m}}{(\operatorname{Tg} \alpha \eta + \operatorname{Tg} \alpha b_0)^2}, & b_m'' &= -1 - b_m', \\ c_m' &= \frac{\operatorname{Tg} \alpha \eta}{\operatorname{Tg} \alpha \eta + \operatorname{Tg} \alpha b_0}, & c_m'' &= 1 - c_m', \\ d_m' &= -c_m' \operatorname{Tg} \alpha b_0, & d_m'' &= d_m'. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Mit dem Ansatz

$$w_1 = \frac{2 P a^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} f_m (\alpha y \operatorname{Cof} \alpha y - \alpha b_1 \operatorname{Ctg} \alpha b_1 \operatorname{Sin} \alpha y) \cos \alpha \xi \cos \alpha x \quad (m = 1, 3, 5, \ldots) \quad (60)$$

wird unter Einhaltung der Randbedingung für $y = \frac{b}{2}$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}\,,$$

wenn zur Abkürzung

$$\omega(\alpha b_1) = a_m' \operatorname{Sin} \alpha b_0 + b_m' \operatorname{Cof} \alpha b_0 + c_m' (\alpha b_0 \operatorname{Sin} \alpha b_0 + \operatorname{Cof} \alpha b_0) + d_m' (\alpha b_0 \operatorname{Cof} \alpha b_0 + \operatorname{Sin} \alpha b_0) \quad (61)$$

und

$$u(\alpha b_1) = \operatorname{Cof} \alpha b_1 - \frac{\alpha b_1}{\operatorname{Sin} \alpha b_1} \quad (62)$$

gesetzt wird,

$$f_m = -\frac{\omega(\alpha b_1)}{u(\alpha b_1)}\,. \quad (63)$$

Für die Berechnung der vierseitigen Einspannung wird zunächst w_0 in Form der *Navier*schen Doppelreihe angesetzt

$$w_0 = \frac{8 P}{a b_1 N} \sum_m \sum_n \frac{\cos \alpha \xi \cos \alpha x \sin \beta_1 \eta \sin \beta_1 y}{(\alpha^2 + \beta_1^2)^2}\,, \qquad \beta_1 = \frac{n \pi}{b_1} \quad \begin{matrix} (m = 1, 3, 5, \ldots) \\ (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \end{matrix} \quad (64)$$

Hieraus erhält man nach entsprechender Umformung

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_{x = \frac{a}{2}} = -\frac{8 P a \varkappa_2}{\pi^3 N} \sum_m \sum_n \frac{m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2 + n^2 \varkappa_2^2)^2} \cos \alpha \xi \sin \beta_1 \eta \sin \beta_1 y \quad \begin{matrix} (m = 1, 3, 5, \ldots) \\ (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \end{matrix} \quad (65)$$

Zur Abkürzung ist hier gesetzt $\varkappa_2 = a/b_1$. Schließlich ist noch

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{2 P a}{\pi^2 N} \sum_m \frac{1}{m^2} f_m (\alpha y \operatorname{Cof} \alpha y - \alpha b_1 \operatorname{Ctg} \alpha b_1 \operatorname{Sin} \alpha y) \cos \alpha \xi \sin \alpha x \quad (m = 1, 3, 5, \ldots).$$

für $x=a/2$ in eine *Fourier*sche Reihe zu entwickeln und der Ausdruck $\left(\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}}$ zu bilden. Man erhält nach gehöriger Zusammenfassung

$$\left(\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \sum_n A_n \sin \beta_1 y, \tag{66}$$

wobei zur Abkürzung

$$A_n = -\frac{8 P a \varkappa_2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+n^2\varkappa_2^2)^2} (m \sin \beta_1 \eta - n(-1)^n \varkappa_2 \mathfrak{f}_m \operatorname{Sin} \alpha_1 b_1) \cos \alpha_1 \xi \quad \begin{matrix}(m=1,3,5,\ldots)\\(n=1,2,3,\ldots)\end{matrix}$$

geschrieben ist.

Die Forderung verschwindender Tangentenneigung längs der Kanten $x=\pm a/2$ wird mittels der Zusatzlösung

$$w_2 = F_1(x,y) + F_2(x,y)$$

befriedigt. Unter Beachtung der Symmetrie und Antisymmetrie in der x- bzw. y-Richtung werde gesetzt

$$F_1(x,y) = \sum_m \frac{\mathfrak{Z}_m}{\alpha^2} (\alpha y \operatorname{Cof} \alpha y - \alpha b_1 \operatorname{Ctg} \alpha b_1 \operatorname{Sin} \alpha y) \cos \alpha x, \tag{67}$$

$$F_2(x,y) = \sum_n \frac{J_n}{\beta_1^2} \left(\beta_1 x \operatorname{Sin} \beta_1 x - \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{Tg} \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{Cof} \beta_1 x\right) \sin \beta_1 y. \tag{68}$$

Entwickelt man wieder $\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}}$ und $\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b_1}$ in *Fourier*reihen, wobei bezüglich der Fortsetzung über das Intervall $\pm b_1$ hinaus ähnliche Voraussetzungen wie unter **3** zu treffen sind, so erhält man am Ende

$$J_n = -\frac{A_n \beta_1}{t\left(\beta_1 \frac{a}{2}\right)} + \frac{4\beta_1^2 \cos n\pi}{b_1 t\left(\beta_1 \frac{a}{2}\right)} \sum_m \mathfrak{Z}_m \frac{\alpha}{(\alpha^2+\beta_1^2)^2} \operatorname{Sin} \alpha b_1 \sin \frac{m\pi}{2}, \tag{69}$$

$$\mathfrak{Z}_m = \frac{8}{a} \frac{\alpha^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{u(\alpha b_1)} \sum_n J_n \frac{\beta_1 \operatorname{Cof} \beta_1 \frac{a}{2}}{(\alpha^2+\beta_1^2)^2} \cos n\pi \qquad \begin{matrix}(m=1,3,5,\ldots)\\(n=1,2,3,\ldots).\end{matrix} \tag{70}$$

Die längeren Entwicklungen sind hier fortgelassen. Ordnet man die Reihen nach m bzw. n und faßt zusammen, so entstehen folgende Ausdrücke:

$$J_n = -\frac{A_n n\pi}{b t\left(\frac{n\pi\varkappa_2}{2}\right)} - \frac{\varkappa_2^4 n^2 \cos n\pi}{t\left(\frac{n\pi\varkappa_2}{2}\right)} \sum_{n'} A_{n'} \frac{n'^2}{b_1} \varphi\left(\frac{n'\pi\varkappa_2}{2}\right) \cos n'\pi \times \left[\lambda_1^{III}(n,n') + \frac{8\varkappa_2^4}{\pi^2} \lambda_3^{III}(n,n') + \frac{8^2\varkappa_2^8}{\pi^4} \lambda_5^{III}(n,n') + \cdots\right], \tag{71}$$

$$\mathfrak{Z}_m = -\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} m^2 \varkappa_2}{u\left(\frac{m\pi}{\varkappa_2}\right)} \sum_n \frac{A_n n^2}{2 b_1} \varphi\left(\frac{n\pi\varkappa_2}{2}\right) \cos n\pi \times \left[\frac{16}{(m^2+n^2\varkappa_2^2)^2} + \frac{8\varkappa_2^4}{\pi^2} \lambda_2^{III}(m,n) + \frac{8^2\varkappa_2^8}{\pi^4} \lambda_4^{III}(m,n) + \cdots\right]. \tag{72}$$

Hier ist

$$\lambda_1^{III}(n,n') = \sum_m \frac{2^5 m^3 \psi\left(\frac{m\pi}{\varkappa_2}\right)}{(m^2+n^2\varkappa_2^2)^2 (m^2+n'^2\varkappa_2^2)^2},$$

$$\lambda_2^{III}(m,n) = \sum_{n'} \frac{2 n'^3 \varphi\left(\frac{n'\pi\varkappa_2}{2}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa_2^2)^2} \lambda_1^{III}(n,n'),$$

$$\lambda_3^{III}(n,n') = \sum_m \frac{2 m^3 \psi\left(\frac{m\pi}{\varkappa_2}\right)}{(m^2+n'^2)^2} \lambda_2^{III}(m,n),$$

$$\lambda_4^{III}(m,n) = \sum_{n'} \frac{2 n'^3 \varphi\left(\frac{n'\pi\varkappa_2}{2}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa_2^2)^2} \lambda_3^{III}(n,n') \qquad \begin{matrix}(m=1,3,5,\ldots)\\(n=1,2,3,\ldots)\end{matrix} \tag{73}$$

usw.

6. Antisymmetrische Belastung in der x- und y-Richtung (Abb. 4). Aus der Belastungsfunktion

$$P(x) = \frac{2P}{a_1} \sum_n \sin \alpha_1 \xi \sin \alpha_1 x$$

erhält man mittels *Lévy*scher Ansätze

$$w_0' = \frac{P a_1^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} Y_m' \sin \alpha_1 \xi \sin \alpha_1 x \qquad \text{für } y' > 0, \tag{74}$$

$$w_0'' = \frac{P a_1^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} Y_m''' \sin \alpha_1 \xi \sin \alpha_1 x \qquad \text{für } y' < 0. \tag{75}$$

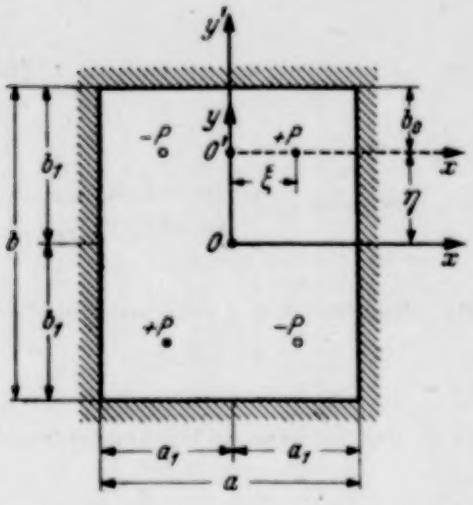

Abb. 4. Plattenbelastung: Antisymmetrie in der x- und y-Richtung.

Hierbei ist zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} Y_m' = {} & A_m' \operatorname{Cof} \alpha_1 y' + B_m' \operatorname{Sin} \alpha_1 y' + \\ & + C_m' \alpha_1 y' \operatorname{Cof} \alpha_1 y' + D_m' \alpha_1 y' \operatorname{Sin} \alpha_1 y' . \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_m''' = {} & A_m''' \operatorname{Cof} \alpha_1 y' - B_m''' \operatorname{Sin} \alpha_1 y' - \\ & - C_m''' \alpha_1 y' \operatorname{Cof} \alpha_1 y' + D_m''' \alpha_1 y' \operatorname{Sin} \alpha_1 y' . \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Die Beiwerte lassen sich wieder unter Beachtung der Rand- und Kontinuitätsbedingungen bestimmen. Es ist

$$\left.\begin{aligned} A_n' = {} & - B_m' \operatorname{Tg} \alpha_1 b_0 - C_m' \alpha_1 b_0 - D_m' \alpha_1 b_0 \operatorname{Tg} \alpha_1 b_0 , \\ B_m' = {} & - \frac{1}{(\operatorname{Tg} \alpha_1 \eta \operatorname{Tg} \alpha_1 b_0)^2} \left[\operatorname{Tg} \alpha_1 \eta (\operatorname{Tg} \alpha_1 \eta + \operatorname{Tg} \alpha_1 b_0) + \alpha_1 b_0 \operatorname{Tg} \alpha_1 \eta (1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha_1 b_0) - \right. \\ & \left. - \alpha_1 \eta \operatorname{Tg} \alpha_1 b_0 (1 - \operatorname{Tg}^2 \alpha_1 \eta) \right] , \\ C_m' = {} & \frac{\operatorname{Tg} \alpha_1 \eta}{\operatorname{Tg} \alpha_1 \eta + \operatorname{Tg} \alpha_1 b_0} , \qquad D_m' = - C_m' \operatorname{Tg} \alpha_1 b_0 , \\ A_m''' = {} & A_m' , \qquad B_m''' = - 1 - B_m' , \qquad C_m''' = 1 - C_m' , \qquad D_m''' = D_m' , \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Der Einspannung längs der Ränder $y = \pm b_1$ genügt der Ansatz

$$w_1 = \frac{P a_1^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} F_m (\alpha_1 y \operatorname{Cof} \alpha_1 y - \alpha_1 b_1 \operatorname{Ctg} \alpha_1 b_1 \operatorname{Sin} \alpha_1 y) \sin \alpha_1 \xi \sin \alpha_1 x . \tag{79}$$

Aus der Bedingung für $y = \pm b_1$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = - \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

erhält man mit

$$\omega(\alpha_1 b_1) = A_m' \operatorname{Sin} \alpha_1 b_0 + B_m' \operatorname{Cof} \alpha_1 b_0 + C_m' (\alpha_1 b_0 \operatorname{Sin} \alpha_1 b_0 + \operatorname{Cof} \alpha_1 b_1) + D_m' (\alpha_1 b_0 \operatorname{Cof} \alpha_1 b_0 + \operatorname{Sin} \alpha_1 b_0) \tag{80}$$

und

$$u(\alpha_1 b_1) = \operatorname{Cof} \alpha_1 b_1 - \frac{\alpha_1 b_1}{\operatorname{Sin} \alpha_1 b_1}$$

den Wert

$$F_m = - \frac{\omega(\alpha_1 b_1)}{u(\alpha_1 b_1)} . \tag{81}$$

Zur Bestimmung der vierseitigen Einspannung wird auf die *Navier*sche Doppelreihe

$$w_0 = \frac{4P}{a_1 b_1 N} \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_1 \xi \sin \alpha_1 x \sin \beta_1 y \sin \beta_1 y}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{82}$$

zurückgegriffen. Es ist mit $\varkappa_3 = a_1/b_1$

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \frac{4 P a \varkappa_3}{\pi^3 N} \sum_m \sum_n \frac{m(-1)^m}{(m^2 + n^2 \varkappa_3^2)^2} \sin \alpha_1 \xi \sin \beta_1 \eta \sin \beta_1 y \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{83}$$

Die Entwicklung von

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \frac{P a_1}{\pi^2 N} \sum_m \frac{(-1)^m}{m^2} F_m (\alpha_1 y \operatorname{Cof} \alpha_1 y - \alpha_1 b_1 \operatorname{Ctg} \alpha_1 b_1 \operatorname{Sin} \alpha_1 y) \sin \alpha_1 \xi \tag{84}$$

in eine *Fourier*reihe ergibt

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \frac{4 P a_1 \varkappa_3^2}{\pi^3 N} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^m (-1)^n n}{(m^2 + n^2 \varkappa_3^2)^2} F_m \operatorname{Sin} \alpha_1 b_1 \sin \alpha_1 \xi \sin \beta_1 y . \tag{85}$$

Mit

$$A_n = \sum_m \frac{(-1)^m}{(m^2+n^2\varkappa_3^2)^2}\left\{m \sin\beta_1\eta - (-1)^n\, n\varkappa_3 F_m \operatorname{Sin}\alpha_1 b_1\right\}\sin\alpha_1\xi$$

ist schließlich

$$\left(\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \frac{4Pa_1\varkappa_3}{\pi^3 N}\sum_n A_n \sin\beta_1 y \qquad (m,n=1,2,3,\ldots). \tag{86}$$

Die Zusatzlösung zur Berechnung der vierseitigen Einspannung lautet

$$w_2 = F_1(x,y) + F_2(x,y)$$

mit

$$F_1(x,y) = \frac{\mathfrak{R}_m}{\alpha_1^2}\left(\alpha_1 y \operatorname{Cof}\alpha_1 y - \alpha_1 b_1 \operatorname{Ctg}\alpha_1 b_1 \operatorname{Sin}\alpha_1 y\right)\sin\alpha_1 x\,, \tag{87}$$

$$F_2(x,y) = \frac{K_n}{\beta_1^2}\left(\beta_1 x \operatorname{Cof}\beta_1 x - \beta_1 a_1 \operatorname{Ctg}\beta_1 a_1 \operatorname{Sin}\beta_1 x\right)\sin\beta_1 y\,. \tag{88}$$

Bildet man wie unter **3** die Ausdrücke $\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a_1}$ und $\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b_1}$, entwickelt sie unter Beachtung der Fortsetzung über den Rand hinaus in *Fourier*sche Reihen, so erhält man aus den Randbedingungen

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a_1} = -\left(\frac{\partial(w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=a_1}, \qquad \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b_1} = 0$$

die unbekannten Beiwerte $\mathfrak{R}_m$ und K_n. Die umfangreichen Zwischenrechnungen sind hier fortgelassen. Nach dem Verfahren der fortgesetzten Approximation (vgl. Abschnitt **3**) wird schließlich

$$\left.\begin{aligned} K_n = &-\frac{A_n n\pi}{b_1 u(n\pi\varkappa_3)} - \frac{1}{2}\,\frac{n^2\varkappa_3^4\cos n\pi}{b_1\pi u(n\pi\varkappa_3)}\sum_{n'} A_{n'}\, n'^2\,\psi(n'\pi\varkappa_3)\cos n'\pi \times \\ &\times\left[\lambda_1^{IV}(n,n') + \frac{4\varkappa_3^4}{\pi^2}\,\lambda_3^{IV}(n,n') + \frac{4^2\varkappa_3^8}{\pi^4}\,\lambda_5^{IV}(n,n') + \cdots\right], \end{aligned}\right| \tag{89}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_m = &\frac{1}{4}\,\frac{m^2\varkappa_3^2\cos m\pi}{b_1 u\left(\frac{m\pi}{\varkappa_3}\right)}\sum_n A_n\, n^2\,\psi(n\pi\varkappa_3)\cos n\pi \times \\ &\times\left[\frac{16}{(m^2+n^2\varkappa_3^2)^2} + \frac{4\varkappa_3^4}{\pi^2}\,\lambda_2^{IV}(m,n) + \frac{4^2\varkappa_3^8}{\pi^4}\,\lambda_4^{IV}(m,n) + \cdots\right]. \end{aligned}\right| \tag{90}$$

Hier ist

$$u(x) = \operatorname{Cof} x - \frac{x}{\operatorname{Sin} x}, \qquad \psi(x) = \frac{\operatorname{Sin} x}{u(x)}.$$

Für die λ-Werte ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{IV}(n,n') &= \sum_m \frac{2^5 m^3\,\psi\left(\frac{m\pi}{\varkappa_3}\right)}{(m^2+n^2\varkappa_3^2)^2(m^2+n'^2\varkappa_3^2)^2}\,, \\ \lambda_2^{IV}(m,n) &= \sum_{n'} \frac{2n'^3\psi(n\pi\varkappa_3)}{(m^2+n'^2\varkappa_3^2)^2}\,\lambda_1^{IV}(n,n')\,, \\ \lambda_3^{IV}(n,n') &= \sum_m \frac{2m^3\psi\left(\frac{m\pi}{\varkappa_3}\right)}{(m^2+n'^2\varkappa_3^2)^2}\,\lambda_2^{IV}(m,n)\,, \\ \lambda_4^{IV}(m,n) &= \sum_{n'} \frac{2n'^3\psi(n'\pi\varkappa_3)}{(m^2+n'^2\varkappa_3^2)^2}\,\lambda_3^{IV}(n,n')\,, \end{aligned}\right\} \quad (m,n=1,2,3,\ldots) \tag{91}$$

usw.

7. Numerische Ermittlungen. Die aus Symmetriebedingungen entstehenden Glieder der Reihen (30a), (31a) sowie (53), (54) und (71), (72) enthalten die Funktion $\varphi(x) = \operatorname{Cof} x/\operatorname{Sin} x + \frac{x}{\operatorname{Cof} x}$. Für ähnlich gebaute Reihen hat *Happel*[1] den Konvergenznachweis erbracht. Es soll deshalb hier nur eine entsprechende Untersuchung für den Fall der Antisymmetrie, wie er durch die Reihen (89), (90) gegeben ist, angestellt werden; im übrigen wird auf die ausführliche Behand-

[1] *H. Happel*, a. a. O., S. 55.

lung der Konvergenzfrage durch *Mathieu*[1] verwiesen. Hierzu ist es notwendig, sich ein Bild über den Verlauf der Funktion

$$\psi(x) = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cof}\, x - \frac{x}{\mathfrak{Sin}\, x}}$$

zu machen. Es gilt folgende Tafel 1:

Tafel 1.

x	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\mathfrak{Sin}\, x$	0,0	0,2013	0,4108	0,6367	0,8881	1,1752	2,1293	3,6269	6,050	10,018
$\mathfrak{Cof}\, x$	1,0	1,0201	1,0811	1,1855	1,3374	1,5431	2,3524	3,7622	6,132	10,068
$\frac{x}{\mathfrak{Sin}\, x}$	1,0	0,995	0,975	0,943	0,900	0,850	0,704	0,552	0,413	0,300
$\mathfrak{Cof}\, x - \frac{x}{\mathfrak{Sin}\, x}$	0	0,0251	0,1061	0,2425	0,4374	0,6931	1,6484	3,2102	5,719	9,768
$\psi(x)$	∞	8,00	3,85	2,63	2,03	1,695	1,293	1,13	1,06	1,025

In den Reihen (89), (90) und (91) erscheinen die Ausdrücke $\psi(n\pi\varkappa_3)$ bzw. $\psi\left(\frac{m\pi}{\varkappa_3}\right)$. Der kleinste in Betracht kommende Wert dieser Größen wird bei den für Rechteckplatten im allgemeinen einzuhaltenden Grenzen von $\varkappa_3 = a_1/b_1 = a/b = 0{,}5$ bzw. 2,0 mit $m=1$ bzw. $n=1$ erreicht und beträgt $n\pi \cdot 0{,}5 = 1{,}57 = \frac{m\pi}{2}$. Dann ist $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2{,}3013}{1{,}8272} = 1{,}26 \approx 1{,}30$.

Setzt man in den Reihen für λ für alle ψ den Wert 1,30 ein, dann sind die so entstehenden Reihen größer als die Reihen λ. Mit der Einführung der Ausdrücke

$$L_1(n) = \sum_m \frac{1{,}3 \cdot 2^3 m}{(m^2 + n^2 \varkappa_3^2)^2},$$

$$L_2(m) = \sum_{n'} \frac{1{,}3 \cdot 2 \cdot n'^3}{(m^2 + n'^2 \varkappa_3^2)^2} \sum_{m'} \frac{1{,}3 \cdot 2^3 \cdot m'}{(m'^2 + n'^2 \varkappa_3^2)^2} = \sum_{n'} \frac{1{,}3 \cdot 2 \cdot n'^3}{(m^2 + n'^2 \varkappa_3^2)^2} \cdot L_1(n'),$$

$$L_3(n) = \sum_m \frac{1{,}3 \cdot 2 \cdot m^2}{(m^2 + n^2 \varkappa_3^2)^2} \cdot L_2(m),$$

$$L_4(m) = \sum_{n'} \frac{1{,}3 \cdot 2 \cdot n'^3}{(m^2 + n'^2 \varkappa_3^2)^2} \cdot L_3(n')$$

usw. in den Reihen (89) bis (91) wird dann

$$\lambda_1^{IV}(n, n') < \frac{2^2}{4 \varkappa_3^2 n^2} L_1(n'),$$

$$\lambda_2^{IV}(m, n) < \frac{2^2}{4 \varkappa_3^2 n^2} L_2(m),$$

$$\lambda_3^{IV}(n, n') < \frac{2^2}{4 \varkappa_3^2 n^2} L_3(n')$$

usw. Es ist nämlich

$$(m^2 + \varkappa_3^2 n^2)^2 = m^4 + 2\,\varkappa_3^2\, m^2 n^2 + \varkappa_3^4\, n^4,$$
$$(m^2 - \varkappa_3^2\, n^2)^2 = m^4 - 2\,\varkappa_3^2\, m^2 n^2 + \varkappa_3^4\, n^4,$$
$$\Delta = 4\,\varkappa_3^2\, m^2 n^2,$$

oder

$$(m^2 + n^2 \varkappa_3^2)^2 = 4\,\varkappa_3^2\, m^2 n^2 + (m^2 - \varkappa_3^2\, n^2)^2 > 4\,\varkappa_3^2\, m^2 n^2.$$

Die Untersuchung läuft auf die Betrachtung der Reihe

$$L_1(n) = \sum_m \frac{1{,}3 \cdot 2^3 \cdot m}{(m^2 + n^2 \varkappa_3^2)^2}$$

hinaus. Nun ist aber

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{(x^2 + \varkappa_3^2 n^2)^2} = \frac{1}{2 n^2 \varkappa_3^2}$$

Daher wird

$$L_1(n) < \frac{2^2 \cdot 1{,}3}{n^2 \varkappa_3^2}$$

und weiter

$$L_2(m) < \frac{2^2 \cdot 1{,}3}{n^2 \varkappa_3^2} \sum_{n'} \frac{1{,}3 \cdot 2 \cdot n'^3}{(m^2 + n'^2 \varkappa_3^2)^2} = \frac{2^3 \cdot 1{,}3^2}{\varkappa_3^2} \sum_{n'} \frac{n'}{(m^2 + n'^2 \varkappa_3^2)^2}.$$

[1] *E. Mathieu*, a. a. O., S. 155.

Tafel 2. *Werte λ^I für die quadratische Platte ($\varkappa=1$).*

n'	$\lambda_1(1,n')$	$\lambda_1(3,n')$	$\lambda_1(5,n')$	$\lambda_1(7,n')$	$\lambda_1(9,n')$	$\lambda_1(11,n')$	$\lambda_1(13,n')$	$\lambda_1(15,n')$	n'
1	1,81200	0,10234	0,02132	0,00724	0,00315	0,00160	0,000903	0,00055	1
3	0,10234	0,01554	0,00517	0,00222	0,00112	0,00063	0,00039	0,00025	3
5	0,02132	0,00517	0,00209	0,00103	0,00057	0,00035	0,00023	0,00016	5
7	0,00724	0,00222	0,00103	0,00055	0,00033	0,00021	0,00014	0,000101	7
9	0,00315	0,00112	0,00057	0,00033	0,00019	0,00014	0,0000905	0,000069	9
11	0,00160	0,00063	0,00035	0,00021	0,00014	0,000093	0,000069	0,000052	11
13	0,000903	0,00039	0,00023	0,00014	0,000095	0,000069	0,000049	0,0000374	13
15	0,00055	0,00025	0,00016	0,000101	0,000069	0,000052	0,0000374	0,00003	15

m	$\lambda_2(m,1)$	$\lambda_2(m,3)$	$\lambda_2(m,5)$	$\lambda_2(m,7)$	$\lambda_2(m,9)$	$\lambda_2(m,11)$	$\lambda_2(m,13)$	$\lambda_2(m,15)$	m
1	0,84291	0,05530	0,01326	0,00500	0,00236	0,00129	0,00077	0,00050	1
3	0,05530	0,00635	0,00214	0,00099	0,00053	0,00033	0,00021	0,00015	3
5	0,01326	0,00214	0,00083	0,00041	0,00024	0,00015	0,00010	0,00007	5
7	0,00500	0,00099	0,00041	0,00022	0,00013	0,00009	0,00006	0,00005	7
9	0,00236	0,00053	0,00024	0,00013	0,00008	0,00006	0,00004	0,00003	9
11	0,00129	0,00033	0,00015	0,00009	0,00006	0,00004	0,00003	0,000024	11
13	0,00077	0,00021	0,00010	0,00006	0,00004	0,00003	0,0000223	0,0000217	13
15	0,00050	0,00015	0,00007	0,00005	0,00003	0,000024	0,0000217	0,000020	15

n'	$\lambda_3(1,n')$	$\lambda_3(3,n')$	$\lambda_3(5,n')$	$\lambda_3(7,n')$	$\lambda_3(9,n')$	$\lambda_3(11,n')$	$\lambda_3(13,n')$	$\lambda_3(15,n')$	n'
1	0,3984	0,0285	0,0074	0,0030	0,0015	0,0008	0,0005	0,0004	1
3	0,0285	0,0029	0,00096	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	3
5	0,0074	0,00096	0,0003	0,0002	0,0001	0,00007	0,00005	0,00005	5
7	0,0030	0,0005	0,0002	0,0001	0,00007	0,00004	0,00003	0,00003	7
9	0,0015	0,0003	0,0001	0,00007	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	9
11	0,0008	0,0002	0,00007	0,00004	0,00003	0,00002	0,00002	0,00001	11
13	0,0005	0,0001	0,00005	0,00003	0,00003	0,00002	0,00001	0,00001	13
15	0,0004	0,0001	0,00005	0,00003	0,000025	0,00001	0,00001	0	15

m	$\lambda_4(m,1)$	$\lambda_4(m,3)$	$\lambda_4(m,5)$	$\lambda_4(m,7)$	$\lambda_4(m,9)$	$\lambda_4(m,11)$	$\lambda_4(m,13)$	$\lambda_4(m,15)$	m
1	0,19039	0,01440	0,00391	0,00169	0,00089	0,00050	0,00031	0,00025	1
3	0,01440	0,00139	0,00044	0,00022	0,00014	0,00008	0,00006	0,00005	3
5	0,00391	0,00044	0,00016	0,00009	0,00006	0,00003	0,00003	0,00002	5
7	0,00169	0,00022	0,00009	0,00005	0,00003	0,00002	0,00001	0,00001	7
9	0,00089	0,00014	0,00006	0,00003	0,000025	0,00001	0,000008	0,000006	9
11	0,00050	0,00008	0,00003	0,00002	0,00001	0,000006	0,000005	0,000004	11
13	0,00031	0,00006	0,00003	0,00001	0,000008	0,000005	0,000003	0,000002	13
15	0,00025	0,00005	0,00002	0,00001	0,000006	0,000004	0,000002	0,0000015	15

n'	$\lambda_5(1,n')$	$\lambda_5(3,n')$	$\lambda_5(5,n')$	$\lambda_5(7,n')$	$\lambda_5(9,n')$	$\lambda_5(11,n')$	$\lambda_5(13,n')$	$\lambda_5(15,n')$	n'
1	0,09157	0,00722	0,0020	0,00091	0,0005	0,0003	0,00018	0,00014	1
3	0,00722	0,00072	0,0002	0,00011	0,00007	0,00004	0,00003	0,00002	3
5	0,0020	0,0002	0,00008	0,00004	0,00003	0,00001	0,00001	0,000007	5
7	0,00091	0,00011	0,00004	0,00002	0,00001	0,000007	0,000005	0,000004	7
9	0,0005	0,00007	0,00003	0,000015	0,00001	0,000005	0,000003	0,000002	9
11	0,0003	0,00004	0,00001	0,000007	0,000005	0,000003	0,000002	0,000001	11
13	0,00018	0,00003	0,00001	0,000005	0,000003	0,000002	0,000001	0,0000008	13
15	0,00014	0,00002	0,000007	0,000004	0,000002	0,000001	0,0000008	0,0000005	15

Tafel 2 (Fortsetzung).

m	$\lambda_6(m,1)$	$\lambda_6(m,3)$	$\lambda_6(m,5)$	$\lambda_6(m,7)$	$\lambda_6(m,9)$	$\lambda_6(m,11)$	$\lambda_6(m,13)$	$\lambda_6(m,15)$	m
1	0,04436	0,00362	0,00102	0,00047	0,00026	0,00016	0,00010	0,00007	1
3	0,00362	0,00034	0,00010	0,00005	0,00003	0,000017	0,000012	0,000009	3
5	0,00102	0,00010	0,000036	0,000018	0,00001	0,000005	0,000004	0,000003	5
7	0,00047	0,00005	0,000018	0,000009	0,0000057	0,000003	0,000002	0,0000016	7
9	0,00026	0,00003	0,000010	0,0000057	0,0000032	0,0000016	0,0000013	0,0000009	9
11	0,00016	0,000017	0,000005	0,000003	0,0000016	0,0000010	0,0000007	0,0000006	11
13	0,00010	0,000012	0,000004	0,000002	0,0000013	0,0000007	0,00000045	0,00000029	13
15	0,00007	0,000009	0,000003	0,0000016	0,0000009	0,0000006	0,00000029	0,00000023	15

n'	$\lambda_7(1,n')$	$\lambda_7(3,n')$	$\lambda_7(5,n')$	$\lambda_7(7,n')$	$\lambda_7(9,n')$	$\lambda_7(11,n')$	$\lambda_7(13,n')$	$\lambda_7(15,n')$	n'
1	0,02159	0,00180	0,00051	0,00024	0,00013	0,00008	0,000048	0,000037	1
3	0,00180	0,00036	0,00005	0,000024	0,000014	0,000008	0,000005	0,000004	3
5	0,00051	0,00005	0,000016	0,000008	0,000005	0,00000027	0,0000019	0,0000013	5
7	0,00024	0,000024	0,000008	0,0000042	0,0000023	0,0000014	0,000001	0,0000007	7
9	0,00013	0,000014	0,000005	0,0000023	0,0000012	0,0000009	0,0000005	0,00000034	9
11	0,00008	0,000008	0,0000027	0,0000014	0,0000009	0,00000046	0,0000003	0,0000002	11
13	0,000048	0,000005	0,0000019	0,0000010	0,0000005	0,00000030	0,0000002	0,0000001	13
15	0,000037	0,000004	0,0000013	0,0000007	0,00000034	0,0000002	0,0000001	0,00000009	15

m	$\lambda_8(m,1)$	$\lambda_8(m,3)$	$\lambda_8(m,5)$	$\lambda_8(m,7)$	$\lambda_8(m,9)$	$\lambda_8(m,11)$	$\lambda_8(m,13)$	$\lambda_8(m,15)$	m
1	0,01054	0,00099	0,00026	0,00012	0,00007	0,000040	0,000024	0,00002	1
3	0,00099	0,00011	0,00003	0,00001	0,000007	0,000004	0,0000025	0,0000018	3
5	0,00026	0,00003	0,000008	0,000004	0,000002	0,0000013	0,0000008	0,0000006	5
7	0,00012	0,00001	0,000004	0,0000018	0,000001	0,0000006	0,0000004	0,0000003	7
9	0,00007	0,000007	0,000002	0,0000010	0,00000057	0,00000034	0,0000002	0,00000014	9
11	0,00004	0,000004	0,0000013	0,0000006	0,00000034	0,00000021	0,00000012	0,00000008	11
13	0,000025	0,0000025	0,0000008	0,0000004	0,00000020	0,00000012	0,00000008	0,00000005	13
15	0,00002	0,0000018	0,0000006	0,0000003	0,00000014	0,00000008	0,00000005	0,00000003	15

n'	$\lambda_9(1,n')$	$\lambda_9(3,n')$	$\lambda_9(5,n')$	$\lambda_9(7,n')$	$\lambda_9(9,n')$	$\lambda_9(11,n')$	$\lambda_9(13,n')$	$\lambda_9(15,n')$	n'
1	0,00516	0,00050	0,00013	0,00006	0,000035	0,00002	0,000012	0,000010	1
3	0,00050	0,00005	0,000013	0,000005	0,000003	0,000002	0,000001	0,0000009	3
5	0,00013	0,000013	0,000004	0,0000018	0,000001	0,0000006	0,0000004	0,0000003	5
7	0,00006	0,000005	0,0000018	0,0000008	0,0000005	0,0000003	0,0000002	0,0000001	7
9	0,000035	0,000003	0,0000010	0,0000005	0,00000025	0,00000015	0,00000009	0,00000005	9
11	0,00002	0,000002	0,0000006	0,0000003	0,00000015	0,00000009	0,00000006	0,00000004	11
13	0,000012	0,000001	0,0000004	0,0000002	0,00000009	0,00000006	0,00000004	0,000000024	13
15	0,000010	0,0000009	0,0000003	0,0000001	0,00000005	0,00000004	0,000000024	0,000000016	15

m	$\lambda_{10}(m,1)$	$\lambda_{10}(m,3)$	$\lambda_{10}(m,5)$	$\lambda_{10}(m,7)$	$\lambda_{10}(m,9)$	$\lambda_{10}(m,11)$	$\lambda_{10}(m,13)$	$\lambda_{10}(m,15)$	m
1	0,00256	0,00024	0,000065	0,00003	0,000017	0,000010	0,000006	0,000005	1
3	0,00024	0,000023	0,000006	0,0000026	0,0000015	0,0000009	0,0000005	0,0000004	3
5	0,000065	0,000006	0,0000019	0,0000008	0,0000005	0,00000029	0,0000002	0,00000013	5
7	0,00003	0,0000026	0,0000008	0,00000037	0,0000002	0,00000012	0,00000008	0,00000006	7
9	0,000017	0,0000015	0,0000005	0,0000002	0,00000011	0,00000007	0,00000004	0,00000003	9
11	0,000010	0,0000009	0,00000029	0,00000012	0,00000007	0,000000043	0,000000026	0,00000002	11
13	0,000006	0,0000005	0,0000002	0,00000008	0,00000004	0,000000026	0,000000017	0,000000012	13
15	0,000005	0,0000004	0,00000013	0,00000006	0,00000003	0,00000002	0,000000012	0,000000018	15

In ähnlicher Weise wie vorher schließt man auf

$$\sum_{n'} \frac{n'}{(m^2+n'^2\varkappa_3^2)^2} < \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(m^2+\varkappa_3^2 x^2)^2} = \frac{1}{2\varkappa_3^2 m^2}.$$

Nun läßt sich die Reihe $\sum_n \frac{n}{(a n^2+b)^2}$, wo a und b gegebene positive Zahlen sind, wie folgt umformen. Es ist

$$\frac{n^4}{(a n^2+b)^2} = \left(\frac{1}{a+\frac{b}{n^2}}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{a^2}.$$

Daher wird

$$\frac{n}{(a n^2+b)^2} \approx \frac{1}{a^2 n^3}.$$

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$ ist für $\gamma>1$ konvergent. Hieraus folgt ohne weiteres die Konvergenz der Reihen für λ^{IV}.

Die λ-Werte entstehen aus Abklingungsvorgängen. Die ersten fünf bzw. sechs Glieder der Reihen berechnet man auf gewöhnliche Weise. Die höheren Reihenglieder können durch Exponentialfunktionen der Form

$$f(x) = C_1 e^{\delta_1 x} + C_2 e^{\delta_2 x} + C_3 e^{\delta_3 x} + \cdots$$

ersetzt werden. In erster Näherung möge zur Restabschätzung die Einführung der ersten Exponentialfunktion genügen. Bezeichnet man mit a_m das m-te Glied der λ-Reihe, so ist

$$a_{m+1} = C e^{\delta x_0}, \quad a_{m+2} = C e^{\delta x_1}.$$

Für $x_0=0$ wird $C=a_{m+1}$ und für $x_1=1$ gilt

$$a_{m+2} = a_{m+1} e^{\delta},$$

woraus folgt

$$\delta = \ln \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}.$$

Wegen $\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < 1$ ist $\delta < 0$. Somit ist $\sum_{m=1}^{\infty} C e^{m\delta}$ eine Reihe mit positiven, monoton abnehmenden Gliedern. Auch

$$f(x) = C e^{\delta x}$$

ist eine für $x > 0$ positive und gleichfalls monoton fallende Funktion. Da das uneigentliche Integral

$$J = \int_1^\infty f(x)\,dx$$

konvergiert und den Wert $-Ce^{\delta}/\delta$ hat, folgt hieraus nach dem *Cauchy*schen Integralkriterium[1] die Konvergenz der Reihe $\sum_m C e^{m\delta}$. Setzt man nunmehr

$$r'_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = C \sum_1^\infty e^{\delta m},$$

dann wird mit $C = \frac{a_{m+1}}{e^{\delta}}$

$$r'_m = C \frac{1}{e^{-\delta}-1} = \frac{a_{m+1}}{1-e^{\delta}}.$$

Für die Reihe $\sum_{m=1,3,5,\ldots} a_m$ gilt entsprechend

$$r'_m = \frac{a_{m+1}}{1-e^{2\delta}} \quad \text{mit} \quad C = \frac{a_{m+1}}{e^{\delta}} \quad \text{und} \quad e^{2\delta} = \frac{a_{m+3}}{a_{m+1}}.$$

Die Schmiegsamkeit des Ansatzes mit Exponentialausdrücken sei an dem Beispiel der Berechnung von $\lambda_1^I(1,1)$ gezeigt. Unter Berücksichtigung der 20 ersten Glieder kommt $\sum_1^{39} \lambda_1^I(1,1) = 0{,}056\,625 \cdot 32 = 1{,}812\,0$. Mit den Gliedern $a_{13}=0{,}000\,002\,63$ und $a_{15}=0{,}000\,001\,293$ erhält man

$$2\gamma = \ln \frac{0{,}000\,001\,293}{0{,}000\,002\,63} = -0{,}709\,3$$

[1] *K. Knopp*, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 303. Berlin 1931.

und weiter $e^{\delta} = 0{,}702$, $e^{2\delta} = 0{,}492$. Daraus folgt $r'_m = 0{,}000\,002\,63 : 0{,}508 = 0{,}000\,005\,2$. Die Summe der 6 ersten Glieder der Reihe für $\lambda^I(1,1)$ beträgt $0{,}056\,619\,3 \cdot 32$. Unter Hinzufügung des Restgliedes r'_m ist

$$\lambda_1^I(1,1) = (0{,}056\,619\,3 + 0{,}000\,005\,2) \cdot 32 = 1{,}81198$$

ein bis auf die vierte Dezimalstelle mit dem Summenwert aus 20 Gliedern übereinstimmendes Ergebnis.

Die Ermittlung der λ-Werte stellt den mühsamsten Teil der numerischen Berechnung dar. In der Zahlentafel 2 sind die Größen λ^I für die quadratische Platte ($\varkappa = 1$) zusammengestellt.

8. Zahlenbeispiele. a) Die quadratische, allseitig eingespannte Platte unter gleichmäßig verteilter Belastung. In diesem Falle soll die Einspannung auf zwei gegenüberliegenden Seiten ($y = \pm b/2$) unmittelbar eingeführt werden. Mit dem Ansatz

$$w' = \frac{4\,p\,a^4}{\pi^5 N} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cos \alpha x, \qquad \alpha = \frac{m\pi}{a} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

und der Zusatzlösung

$$w'' = \frac{4\,p\,a^4}{\pi^5 N} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} (a_m \operatorname{Cof} \alpha y + b_m \alpha y \operatorname{Sin} \alpha y) \cos \alpha x$$

erhält man die Grundlösung

$$(w_0 + w_1) = \frac{4\,p\,a^4}{\pi^5 N} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left[1 - \frac{1 + \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Ctg} \alpha \frac{b}{2}}{s\left(\alpha \frac{b}{2}\right)} \operatorname{Cof} \alpha y + \frac{1}{s\left(\alpha \frac{b}{2}\right)} \alpha y \operatorname{Sin} \alpha y\right] \cos \alpha x.$$

Hieraus gewinnt man durch einmalige Differentiation nach x

$$\left(\frac{\partial (w_0 + w_1)}{\partial x}\right)_{x = \frac{a}{2}} = -\frac{4\,p\,a^3}{\pi^4 N} \sum \frac{1}{m^4} \left[1 - \frac{1 + \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Ctg} \alpha \frac{b}{2}}{s\left(\alpha \frac{b}{2}\right)} \operatorname{Cof} \alpha y + \frac{\alpha y \operatorname{Sin} y}{s\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}\right] (m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt $s\left(\alpha \frac{b}{2}\right) = \operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2} + \frac{\alpha \frac{b}{2}}{\operatorname{Sin} \alpha \frac{b}{2}}$. Die Entwicklung dieses Ausdrucks in eine *Fourier*reihe der Koordinate y ergibt nach gehöriger Zusammenfassung

$$\left(\frac{\partial (w_0 + w_1)}{\partial x}\right)_{x = \frac{a}{2}} \sum_n A_n \cos \beta y \qquad (m, n = 1, 3, 5, \ldots)$$

mit

$$A_n = -\frac{16\,p\,a^4 (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^5 N b} \sum_m \frac{1}{m^4} \left[\frac{1}{n\varkappa} - \frac{n\varkappa}{m^2 + n^2\varkappa^2} - \frac{2\,m^2\,n\varkappa}{(m^2 + n^2\varkappa^2)^2} \frac{\operatorname{Sin} \alpha b}{\alpha b + \operatorname{Sin} \alpha b}\right].$$

Die vierseitige Einspannung wird mit der Zusatzlösung w_2, wie unter **3** angegeben, ermittelt. Die Zahlenwerte sind in nachfolgender Tafel 3 zusammengestellt.

Tafel 3. *Werte A_n, G_n und $\mathfrak{G}_m$.*

$A_1 = +0{,}118\,107 \cdot \left(-\frac{16\,p\,a^4}{\pi^5 N b}\right)$	$G_1 = 0{,}1934 \cdot \frac{16\,p\,a^2}{\pi^5 N}$	$\mathfrak{G}_1 = -0{,}1123 \cdot \frac{16\,p\,a^2}{\pi^5 N}$
$A_3 = -0{,}013\,495$ „	$G_3 = 0{,}000\,167$ „	$\mathfrak{G}_3 = +0{,}002\,706$ „
$A_5 = -0{,}004\,200$ „	$G_5 = 0{,}000\,005\,5$ „	$\mathfrak{G}_5 = -0{,}000\,077\,5$ „
$A_7 = +0{,}001\,755$ „	$G_7 = 0{,}000\,001\,293$ „	$\mathfrak{G}_7 = +0{,}000\,002\,334$ „

Mit diesen Werten wird das Moment in Feldmitte

$$(m_{x,0+1})_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{4\,p\,a^2}{\pi^3} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \left[1 - \frac{1 + \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Ctg} \alpha \frac{b}{2}}{s\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}\right] = 0{,}015\,74\,p\,a^2,$$

$$(m_{x,2})_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{16\,p\,a^2}{\pi^5} \sum_m \left[\mathfrak{G}_m \frac{m\pi}{2} \operatorname{Tg} \frac{m\pi}{2} + \sum_n G_n \left(2 - \frac{n\pi}{2} \operatorname{Tg} \frac{n\pi}{2}\right)\right] = 0{,}002\,21\,p\,a^2,$$

$$(m_x)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0{,}017\,95\,p\,a^2,$$

Für das Stützenmoment in Seitenmitte erhält man in ähnlicher Weise

$$(m_x)_{\substack{x=\frac{a}{2}\\ y=0}} = (m_y)_{\substack{x=0\\ y=\frac{b}{2}}} = -0{,}052\, pa^2 .$$

b) Die quadratische, eingespannte Platte mit einer Einzellast in Feldmitte. Führt man auch hier wie bei dem vorherigen Beispiel die Lösung für die auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannte Platte als Grundlösung ein, so wird mit dem Werte

$$A_n = -\frac{4\,Pa}{\pi^3 N} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m^2+n^2\varkappa^2)^2} \left[m - n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha\frac{b}{2}\ \mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}\ \mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2} + \alpha\frac{b}{2}} \right]$$

die Ableitung

$$\left(\frac{\partial (w_0+w_1)}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \sum_n A_n \cos \beta y \qquad (m, n = 1, 3, 5, \ldots) .$$

Der Ausdruck stimmt mit dem in (20) ermittelten überein. Seine Werte, sowie diejenigen für die vierseitige Einspannung nach den Formeln (30a) und (31a) berechneten, sind in der Tafel 4 angegeben.

Tafel 4. *Werte A_n, G_n und $\mathfrak{G}_m$.*

$A_1 = -0{,}103228$	$\frac{4\,Pa}{\pi^3 N}$	$G_1 = 0{,}022097$	$\frac{P}{N}$	$\mathfrak{G}_1 = -0{,}013048$	$\frac{P}{N}$
$A_3 = -0{,}017921$	„	$G_3 = 0{,}000133$	„	$\mathfrak{G}_3 = 0{,}000317$	„
$A_5 = +0{,}003125$	„	$G_5 = 0{,}000002725$	„	$\mathfrak{G}_5 = -0{,}00001016$	„
$A_7 = -0{,}00123$	„	$G_7 = 0{,}0000001386$	„	$\mathfrak{G}_7 = 0{,}000000310$	„
$A_9 = +0{,}000554$	„	$G_9 = 0{,}0000000006232$	„	$\mathfrak{G}_9 = -0{,}00000001093$	„
$A_{11} = -0{,}000327$	„	$G_{11} = 0{,}0000000000236$	„	$\mathfrak{G}_{11} = 0{,}0000000000356$	„
$A_{13} = +0{,}000176$	„	$G_{13} = 0{,}00000000000922$	„	$\mathfrak{G}_{13} = -0{,}00000000001275$	„
$A_{15} = -0{,}000134$	„	$G_{15} = -0{,}00000000000391$	„	$\mathfrak{G}_{15} = 0{,}00000000000509$	„

Das Einspannmoment m_y im Grundsystem ist

$$(m'_y)_{\substack{x=0\\ y=\frac{b}{2}}} = -\frac{P}{2\varkappa} \sum_{m=1,3,\ldots} \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{b}{2}\ \mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2} + \alpha\frac{b}{2}} = -0{,}1658\ P.$$

Aus der Zusatzlösung erhält man für den Punkt $x=\frac{a}{2}$, $y=0$

$$(m''_x)_{\substack{x=\frac{a}{2}\\ y=0}} = -2 \sum_{n=1,3,\ldots} G_n\, \mathfrak{Cof}\,\beta\frac{a}{2} = -0{,}125\ P;$$

für den Punkt $x=0$, $y=\frac{b}{2}$ wird

$$(m''_y)_{\substack{x=0\\ y=\frac{b}{2}}} = -2 \sum_{m=1,3,\ldots} \mathfrak{G}_m\, \mathfrak{Cof}\,\alpha\frac{b}{2} = +0{,}0413\ P.$$

Das Gesamtmoment an dieser Stelle ist dann

$$(m_y)_{\substack{x=0\\ y=\frac{b}{2}}} = -0{,}1658\ P + 0{,}0413\ P = -0{,}1245\ P \approx -0{,}125\ P.$$

Die Übereinstimmung mit dem *Henckyschen* Wert $-0{,}126\ P$ ist befriedigend.

Die beiden Beispiele vermitteln ein anschauliches Bild der Güte der Konvergenz. Während im ersten bereits 4 Reihenglieder genügen, um die technischen Bedürfnissen genügende Genauigkeitsgrenze zu erreichen, müssen im zweiten Falle schon doppelt so viel Glieder berechnet werden, um die Momente auf drei Dezimalstellen angeben zu können. Die aus den Ansätzen für w_1 gewonnenen Reihen konvergieren um so schlechter, je mehr man sich dem Rande $y = \pm b/2$ nähert, doch ergeben sich für die höheren Reihenglieder Vereinfachungen in den numerischen Berechnungen.

(Eingegangen am 27. Juli 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Rudolf Ohlig*, (16) Wiesbaden, Hainerstraße 1.

Berichtigung

zu meinem Aufsatz in Bd. XVI, S. 321: „Der Einfluß der Trägheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie".

Von **W. Kahlert.**

Veranlaßt durch einige Nachfragen, möchte ich folgende Unkorrektheit aufklären: Die Drücke p_0, p_1 und p_2 werden physikalisch sinnvoll als Überdrücke gegen den Außendruck (etwa Atmosphärendruck) gerechnet, während der Druck p_k, der durch die „Korrekturströmung" hinzukommt, absolut gerechnet ist. Dann drücken sich die von der klassischen Theorie her geläufigen Grenzbedingungen, die auch von der Korrekturströmung eingehalten werden müssen, am Anfang und Ende des Schmierkeils beim ebenen Gleitschuh aus: auf S. 323

$$p_1 = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l$$

(statt $x = 1$, Druckfehler!) und auf S. 325

$$p_2 = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l\,.$$

Für das Zapfenlager ist diese Bedingung ja schon entsprechend ausgesprochen (S. 334, unten).

(Eingegangen am 23. Februar 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Wolfgang Kahlert*, Arndell, 22 The Fairfield, Farnham, Surrey (England).

Kurzes Lehrbuch der elektrischen Maschinen

Wirkungsweise · Berechnung · Messung

Von

Rudolf Richter

Mit 406 Abbildungen im Text. XII, 386 Seiten. 1949

Ganzleinen DMark 25.50

INHALTSÜBERSICHT:

I. Einführung. Magnetische und elektrische Begriffe und Gesetze – Stromerzeugung – Krafterzeugung – Umformung.

II. Die Ankerwicklungen. Gleichstrom-Ankerwicklungen – Wechselstromwicklungen – Isolierung.

III. Berechnungsgrundlagen. Die induzierte EMK – Die Felderregerkurve – Drehmoment und Ausnutzung des Ankermantels – Die elektromagnetischen Eigenschaften des Eisens – Magnetische Kennlinie bei Leerlauf – Die Verluste – Die Blindwiderstände – Ortskurven – RET und REM.

IV. Transformator. Grundsätzlicher Aufbau – Betriebsverhalten – Sonderschaltungen – Magnetisierungserscheinungeu – Streuungserscheinungen – Entwurf – Messungen.

V. Induktionsmaschine. Grundsätzlicher Aufbau – Der Drehtransformator – Wirkungsweise der mehrphasigen Induktionsmaschine – Anlaufschaltungen – Drehzahlregelung – Einphasenmaschine – Entwurf – Messungen.

VI. Synchronmaschine. Grundsätzlicher Aufbau – Ankerrückwirkung – Die selbständige mehrphasige Synchronmaschine – Die mehrphasige Synchronmaschine am Netz mit fester Spannung – Einphasenmaschine – Entwurf – Messungen.

VII. Die Gleichstrommaschine. Grundsätzlicher Aufbau – Ankerrückwirkung – Stromwendung – Der magnetische Kreis der Wendepole – Betriebseigenschaften der Generatoren – Betriebseigenschaften der Motoren – Entwurf – Messungen.

VIII. Einankerumformer. Übersetzungen, Stromwärme – Ankerrückwirkung, Stromwendung, Spannungsverlust – Betrieb des Umformers – Entwurf – Kaskadenumformer.

IX. Einphasen-Stromwendermaschinen. Der Anker mit Stromwender im Wechselfelde – Reihenschlußmotor – Einphasenmaschinen mit Nebenschlußeigenschaften – Repulsionsmotor – Entwurf.

X. Dreiphasen-Stromwendermaschinen. Der Läufer mit Stromwender im Drehfeld – Reihenschlußmotor – Ständergespeiste Nebenschlußmaschine – Läufergespeiste Nebenschlußmaschine – Entwurf.

XI. Die Regelsätze. Begriff und Aufgaben – Hilfsmaschinen – Ortskurve des Stromes der IM – IM mit blindstromerzeugender HM – Drehzahlregelung – Leistungsregelung – Regelsatz mit Gleichstrom-HM.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Konforme Abbildung

Von

Dipl.-Ing., Dr. phil.

Albert Betz

Direktor des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung
und Professor an der Universität Göttingen

Mit 276 Bildern. VIII, 359 Seiten. 1948

DMark 36.—

Das vorliegende Buch über „Konforme Abbildung" will vor allem den vielen Ingenieuren und Naturwissenschaftlern, welche dieses wichtige mathematische Hilfsmittel für ihre praktischen Aufgaben brauchen, in einer ihrer Ausbildung angepaßten Form vermitteln. Aus diesem Grunde werden Vorkenntnisse aus der mathematischen Funktionentheorie nicht vorausgesetzt, sondern umgekehrt die Leser an Hand von anschaulichen Beispielen in diese mathematische Disziplin eingeführt, die dann erst später für weitere Aufgaben Verwendung findet. Wenn das Buch demnach nicht eigentlich für Mathematiker geschrieben ist, so dürfte es aber doch auch für diese als Gesamtdarstellung dieses Sondergebietes von Interesse sein und vielleicht gerade wegen der Eigenart der stark auf der geometrischen Anschauung beruhenden Darstellung manche Anregung bieten.

INHALTSÜBERSICHT:

I. Abschnitt. Einführung und einfache Beispiele.
II. Abschnitt. Elektrische Stromfelder.
III. Abschnitt. Weitere Beispiele und Folgerungen.
IV. Abschnitt. Allgemeine Erkenntnisse.
V. Abschnitt. Auftreten der konformen Abbildung in anderen Gebieten der Physik.
VI. Abschnitt. Zusammenhang der konformen Abbildung mit der Theorie der komplexen Funktionen.
VII. Abschnitt. Abbildung durch einfache Funktionen.
VIII. Abschnitt. Einige zusammengesetzte Funktionen.
IX. Abschnitt. Behandlung gegebener Abbildungsaufgaben.
X. Abschnitt. Doppelperiodische Felder.
XI. Abschnitt. Freie Strahlen.
Übersicht über die wichtigsten behandelten Abbildungen.
Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.